УДК 539.3

Н.Н.Волосова, В.И.Сарандачев, П.А. Стеблянко

СОПОСТАВЛЕНИЕ МЕТОДОВ РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ НА ПРИМЕРЕ НЕКОТОРЫХ ДЕТАЛЕЙ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Порівняння результатів з аналогічними результатами, отриманими за допомогою метода покомпонентного розщеплення підвищеної точності і кінцево-різницевого методу, показало добре спів падання результатів в околі середини валка, а по мірі наближення до краю, де стан є неодномірним за осьовою і радіальною координатах, результати можуть суттєво відрізнятися. В околі краю валка, де стан є неодномірним за осьовою і радіальною координатах, для розрахунків температурного напружено-здеформованого стану доцільно застосовувати метод покомпонентного розщеплення підвищеної точності, оскільки він дає більш точні результати у вузлах просторової сітки, ніж кінцево-різницевий метод.

Введение. Долговечность валков станов горячей прокатки зависит от величины и характера их нагружения. Однако, наряду с указанными факторами, значительное влияние на долговечность оказывают температурные условия работы валков.

Степень нагрева валков в процессе прокатки зависит от величины обжатия, механических свойств прокатываемого металла, трения в очаге деформации, скорости и времени процесса прокатки, подачи охлаждающей эмульсии, коэффициентов теплопроводности, конвенции, излучения и т.д. Нагрев валков определяет их профиль и, следовательно, влияет на условия деформации металла, как по длине, так и по ширине полосы.

В связи с развитием непрерывных станов и тенденцией роста скоростей прокатки тепловой баланс и температурный режим работы валков приобретает большое значение.

Особенностью работы валков станов горячей прокатки является периодичность их нагрева от прокатываемого металла и охлаждение водой. В процессе нагрева и охлаждения в поверхностном слое валков возникает переменное температурное поле, под действием которого появляются значительные циклические температурные напряжения. Величина этих напряжений, в зависимости от режимов работы прокатного стана, может в значительной степени превышать предел текучести материала и являться основной причиной возникновения сетки разгара и последующей термической усталости [1].

При горячей прокатке наибольшее напряжение на поверхность валка в зоне контакта с прокатываемым металлом. Однако в этой зоне материал находится в условиях всестороннего сжатия, а в таких случаях допускаемые напряжения практически в 4 раза могут превышать предел

 ISSN 1991-7848

текучести. Таким образом, разработка более точных методов расчета термонапряженного состояния таких деталей металлургических конструкций является актуальной задачей.

В работах [3-4] решен ряд нестационарных задач механики деформируемого твердого тела, где применялись физические соотношения теории термоупругопластичности, позволяющие описывать простые и близкие к простым процессы деформирования и процессы деформирования по траекториям малой кривизны [7]. Связанные нестационарные задачи решены в работах [5, 6, 9].

Одним из наиболее эффективных приемов при численном решении пространственных нестационарных задач теории термоупругопластичности является подход, основанный на использовании для определения неизвестных величин, метода дробных шагов или метода покомпонентного расщепления [3, 4, 8] в сочетании с представлением искомых величин в виде сплайн-функций [3-6, 8, 9]. Преимущество данного подхода обусловлено тремя факторами. Он не сложнее в реализации, чем конечно-разностный метод [3-4]. Решение находится в виде сплайна во всей области определения, в то время как разностное решение ищется только на сетке. Дает более высокий порядок аппроксимации, что позволяет выбирать более крупную сетку по координатам по сравнению с конечно-разностным методом при условии достижения одинаковой точности вычислений [2, 4].

Постановка нестационарных задач теории термоупругопласти-чности. Основной задачей нестационарной теории термоупруго-пластичности является определение перемещений (скоростей перемещений) и компонент тензоров напряжений и деформаций, возникающих в пространственном теле в процессе его нагружении, когда некоторые элементы тела работают за пределом упругости материала. Процесс нагружения будем рассматривать развивающимся во времени, что может вызвать движение отдельных частей тела.

Пусть первоначально изотропное и однородное тело V, ограниченное поверхностью S , в начальный момент времени t=0 находится в естественном ненапряженном состоянии, где α^i - оси произвольной ортогональной системы координат, i = 1, 2, 3. Затем тело подвергается нагружению внешними силами и нагреву. Это могут быть объемные силы $\vec{K}(\alpha^i,t)$, воздействующие на каждый элемент тела, и поверхностные силы $\vec{\Sigma}_n(\alpha^i,t)$, действующие на части поверхности тела S_Σ. На другой части поверхности тела S_v, которая может быть определенным образом закреплена, задаются скорости перемещений $\vec{V}(\alpha^i,t)$. Конфигурация тела задается уравнением поверхности $\Phi(\alpha^i) = 0$, которая ограничивает его. Механические характеристики материала при исследовании процессов деформирования по прямолинейным траекториям и траектория малой кривизны задаются в виде мгновенных диаграмм растяжения образцов.

Исходя из перечисленных данных, необходимо определить температурное поле, составляющие вектора скорости перемещений, компоненты тензора напряжений и компоненты тензора деформаций. Для этого необходимо воспользоваться уравнениями движения, геометрическими, физическими уравнениями и уравнением тепло-проводности.

При решении нестационарной задачи теории пластичности в тех частях тела, где возникают необратимые деформации, будем пользо-ваться определяющими уравнениями, описывающими процессы нагружения как по прямолинейным траекториям, так и по траекториям деформирования малой кривизы. Здесь используется форма физических уравнений, приведенная в монографии [3].

Полная система уравнений в общем случае имеет вид [3-4]

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = A_1 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \alpha} + A_2 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \beta} + A_3 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \gamma} + \vec{B}, \tag{1}$$

где $\vec{W}$ - вектор, компонентами которого будут скорости пере-мещений v_i, составляющие тензоров напряжений и деформаций $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij},\ i,j = 1,2,3$. Система (1) решается при определенных начальных и граничных условиях.

Нестационарное трехмерное уравнение теплопроводности, используемое при решении связанных задач механики деформи-руемого твердого тела, имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{H_1 H_3}{H_2}\frac{\partial T}{\partial \beta}\right) + \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial T}{\partial \gamma}\right) + \frac{W_*}{\lambda}\right], \tag{2}$$

где

$$W_* = S_{ij}\dot{Y}_{ij} - \frac{S_{ij}\dot{S}_{ij}}{2G} + \frac{\sigma_{ij}}{3}(\dot{\varepsilon}_{ij} - 3\alpha \dot{T}) - \frac{\sigma_{ii}\dot{\sigma}_{ii}}{9K}, \tag{3}$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma,\ \acute{Y}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon,\ \sigma = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3},\ \varepsilon = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3},$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)},\ K = \frac{E}{1-2\nu},$$

H_1, H_2, H_3 - коэффициенты Ляме, a – коэффициент температуропроводности, λ - коэффициент теплопроводности, E-модуль Юнга, ν- коэффициент Пуассона. Точкой сверху обозначены скорости (производные по времени) от соответствующих величин.

При решении нестационарных пространственных задач в цилиндрической системе координат r, φ, x в уравнении (2) следует положить $H_1 = H_3 = 1,\ H_2 = r,$, $\alpha = r,\ \beta = \varphi,\ \gamma = x$. Тогда из уравнения (2) получим

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right] + \frac{aW_*}{\lambda r}. \tag{4}$$

 ISSN 1991-7848

Аналитический метод решения. Аналитическое определение температуры и напряжений в прикладной задаче для валка блюминга 1150 (сталь 50ХН, минимальный катающий диаметр *d = 900 мм*, длина *l=2700 мм.)* оказалось возможным лишь в упрощенной одномерной постановке[1]. Приведем основные результаты.

Температурное поле рассматриваемого цилиндрического тела, нагреваемого через единицу поверхности граничной плоскости, имеет вид

$$T = \frac{2q\sqrt{t}}{\sqrt{\pi\lambda c\rho}}\left\{e^{-\frac{x^2}{4a\tau}} - \sqrt{\pi}\,\frac{x}{2\sqrt{at}}\left[1 - \hat{O}\,(\frac{\tilde{o}}{2\sqrt{\grave{a}t}})\right]\right\}, \tag{5}$$

где T – температура, ℃; t – время контакта; $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ – коэффициент теплопроводности, характеризующий быстроту выравнивания температур различных точек температурного поля валка; x – осевая координата; c – теплоемкость материала валка; ρ – плотность материала валка, q – тепловой поток; $q = \alpha(t_2 - t_1)$, α – коэффициент теплоотдачи через окалину; $\alpha = \frac{\lambda}{s}$; λ – теплопроводность окалины; s – толщина; $\Phi(\frac{x}{2\sqrt{at}})$ – интегралы вероятности распределения ошибок.

Для определения температурных напряжений рабочего валка получены формулы, справедливые при симметричном распределении температур относительно оси валка

$$\sigma_z = \frac{E\alpha}{1-\mu}\left(\frac{2}{R^2 - r_0^2}\int_{r_0}^{R} Trdr - T\right); \tag{6}$$

$$\sigma_t = \frac{E\alpha}{1-\mu}\left(\frac{1}{r^2}\int_0^r Trdr + \frac{r^2 + r_0^2}{r^2(R^2 - r_0^2)}\int_0^R Trdr - T\right); \tag{7}$$

$$\sigma_r = \frac{E\alpha}{1-\mu}\left(-\frac{1}{r^2}\int_{r_0}^{R} Trdr + \frac{r^2 + r_0^2}{r^2(R^2 - r_0^2)}\int_{r_0}^{R} Trdr - T\right); \tag{8}$$

где $\sigma_z, \sigma_t, \sigma_r$ – соответственно осевое, окружное и радиальное нормальные напряжения; α – коэффициент линейного расширения материала валка; *E*, μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно; *R*, *r*, – соответственно, радиус поверхности валка, текущий радиус.

Расчеты по формулам показывают, что максимальные температурные напряжения в поверхностном слое валка, с учетом промежуточного слоя окалины, наблюдаются при наиболее длительном времени контакта с разогретым металлом. При этом температура поверхности валка в месте контакта достигает 450°С. При установившемся режиме прокатки температура поверхности валка не превышает 300°С.

Конечно-разностный метод. Для сравнения результатов рассмотрим конечно-разностный подход к решению нестационарной двухмерной задачи теории термоупругопластичности и нестационарного уравнения теплопроводности. Введем в рассмотрение сетку по времени ω_r и сетку по координатам ω_h

$$\omega_r = \left\{\ t_p ; t_{p+1} = t_p + \tau\ ;\ t_0 = 0;\ p = 0,1,2,... \right\}, \tag{9}$$

$$\omega_h = \begin{cases} r_i, \varphi_j, x_k ; r_{i+1} = r_i + h_1\ ; \varphi_{j+1} = \varphi_j + h_\varphi ; x_{k+1} = x_k + h_3 ; \\ i = 0,1,...N_1 ; j = 0,1,...N_2 ; k = 0,1,...N_3 . \end{cases}. \tag{10}$$

Неявная разностная схема в произвольном узле r_i, φ_j, x_k выглядит так

$$\frac{T^{p+1/3} - T^p}{\tau} = \frac{a}{h_1^2}\left[\alpha\left(\mu_1\left(T^{p+1}\right) + \frac{h_1}{r_i}\lambda_1\left(T^{p+1}\right)\right) + \beta\left(\mu_1\left(T^p\right) + \frac{h_1}{r_i}\lambda_1\left(T^p\right)\right)\right] + \\ + \frac{a}{r_i^2}\frac{1}{h_\varphi^2}\left[\alpha\mu_2\left(T^{p+1}\right) + \beta\mu_2\left(T^p\right)\right] + \frac{a}{h_3^2}\left[\alpha\mu_3\left(T^{p+1}\right) + \beta\mu_3\left(T^p\right)\right] + \frac{W_*^p\left(r_i, \varphi_j, x_k\right)}{\rho\ c\, r_i}. \tag{11}$$

Здесь $\alpha + \beta = 1$, $\lambda_n, \mu_n\ (n = 1,2,3)$ - разностные операторы, аппроксимирующие производные соответственно первого и второго порядка по координатам [3, 4].

Для явной схемы ($\alpha = 0, \beta = 1$) на основании (11) можно записать

$$T^{p+1} = T^p + \tau\, a\left\{\frac{1}{h_1^2}\left(\mu_1\left(T^p\right) + \frac{h_1}{r_i}\lambda_1\left(T^p\right)\right) + \frac{\mu_2\left(T^p\right)}{r_i^2 h_\varphi^2} + \frac{\mu_3\left(T^p\right)}{h_3^2}\right\} + \tau\frac{W_*^p\left(r_i, \varphi_j, x_k\right)}{\rho\ c\, r_i}. \tag{12}$$

Перейдем к решению системы (1). Обозначим через $W_m{}^p$ компоненты вектора $\vec{W}$, которые вычисляются в момент времени t=t_p. Аналогичные обозначения вводятся и для составляющих вектора $\vec{B}$. При переходе от уравнений полной системы к разностной схеме их решения производные по времени и по координатам заменяются разностными отношениями.

Неявная схема конечно-разностного метода для определения неизвестных величин, позволяют получить такие формулы

$$\frac{W_m^{p+1} - W_m^p}{\tau} = \alpha\left(\Lambda_1 W_m + \Lambda_2 W_m + \Lambda_3 W_m\right)^{p+1} + \beta\left(\Lambda_1 W_m + \Lambda_2 W_m + \Lambda_3 W_m\right)^p + B_m^p . \tag{13}$$

Здесь $\alpha + \beta = 1$, а также введены обозначения для дифференциального оператора первого порядка $\Lambda_s W_m \equiv A_s \dfrac{\partial W_m}{\partial \alpha_s}, s = 1,2,3$. Суммирование по s не ведется[4].

В случае применения явной схемы ($\alpha = 0, \beta = 1$) из (13) получим

$$W_m^{p+1} = W_m^p + \tau\left(\Lambda_1 W_m + \Lambda_2 W_m + \Lambda_3 W_m\right)^p + \tau\, B_m^p . \tag{14}$$

 ISSN 1991-7848

Для случая осесимметричного состояния тела при использовании схемы Кранка-Николсона ($\alpha = \beta = 0{,}5$), формулы (13), (14) перепишутся так

$$W_m^{p+1} = W_m^p + \tau\left(\Lambda_1 W_m + \Lambda_3 W_m\right)^p + \tau B_m^p, \tag{15}$$

$$\left(W_m\right)_{n+1}^{p+1} = W_m^p + \frac{\tau}{2}\left\{\left(\Lambda_1 W_m + \Lambda_3 W_m\right)_n^{p+1} + \left(\Lambda_1 W_m + \Lambda_3 W_m\right)^p + 2B_m^p\right\}. \tag{16}$$

Метод расщепления повышенной точности. Применим к векторному уравнению (1) в случае осесимметричного нагружения метод покомпонентного расщепления [4]. Введем в рассмотрение сетку по времени ω_r с учетом дробного шага.

$$\omega_r = \left\{t_p; t_{p+1/2} = t_p + \tau_1; t_{p+1} = t_{p+1/2} + \tau_2; \tau = \tau_1 + \tau_2; t_0 = 0; p = 0,1,2,..\right\}$$

Идея метода покомпонентного расщепления состоит в том, что вместо векторного уравнения $\dfrac{\partial \vec{W}}{\partial t} = A_1 \dfrac{\partial \vec{W}}{\partial r} + A_3 \dfrac{\partial \vec{W}}{\partial z} + \vec{A}$ на полном шаге интегрирования по времени τ ($t \in [t_p;\ t_{p+1}]$) последовательно решаются два эквивалентных ему одномерных векторных уравнения, каждое на своем дробном шаге по времени. Эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = A_1 \frac{\partial \vec{W}}{\partial r} + \phi_1 \vec{B}, \quad t \in [t_p, t_{p+1/2}], \ \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = A_3 \frac{\partial \vec{W}}{\partial z} + \phi_2 \vec{B}, \quad t \in [t_{p+1/2}, t_{p+1}], \tag{17}$$

где $\phi_1 + \phi_2 = 1$, t_p − момент времени, в который решение задачи уже известно, t_{p+1} - момент времени, в который решение разыскивается.

Разностная схема для расщепленной системы (17) может быть представлена так

$$\frac{1}{\tau}(\vec{W}^{p+1/2} - \vec{W}^p) = \alpha\Lambda_1\vec{W}^{p+1/2} + \beta\Lambda_1\vec{W}^p + \phi_1\vec{B}^p,$$

$$\frac{1}{\tau}(\vec{W}^{p+1} - \vec{W}^{p+1/2}) = \alpha\Lambda_3\vec{W}^{p+1} + \beta\Lambda_3\vec{W}^{p+1/2} + \phi_2\vec{B}^{p+1/2}, \tag{18}$$

где $\alpha+\beta = 1$, а дифференциальные операторы $\Lambda_n\vec{W}$ вводятся следующим образом $\Lambda_1\vec{W} = \dfrac{A_1}{h_1}\cdot\lambda_1(\vec{W}), \quad \Lambda_3\vec{W} = \dfrac{A_3}{h_3}\cdot\lambda_3(\vec{W}), \quad n = 1, 2.$

Здесь $\lambda_n(...)$ − разностные операторы, $\vec{W}^{p+n/2}$, $\vec{B}^{p+n/2}$ − векторы решения и правой части для соответствующего момента времени, h_n − шаги интегрирования по координатам r, z ..

В случае, когда $\alpha = 0, \beta = 1,$ схема (18) будет явной. Тогда расчетные формулы можно представить так

При $\alpha = 1, \beta = 0$ выражение (18) дает неявную схему. Если же $\alpha = \beta = 1/2,$ то имеет место схема Кранка−Николсона, которая в отличии от двух предыдущих схем первого порядка имеет второй порядок аппроксимации по времени. Решение системы (18) предлагается строить при помощи следующей итерационной процедуры

$$(\vec{W}^{p+1/2})_{i+1} = \vec{W}^{p} + \tau \frac{A_1}{h_1}\{\ \alpha\lambda_1(\vec{W}^{p+1/2})_i + \beta\lambda_1(\vec{W}^{p})\ \} + \tau\phi_1\vec{B}^{p}, \qquad (19)$$

$$(\vec{W}^{p+1})_{j+1} = \vec{W}^{p+1/2} + \tau \frac{A_3}{h_3}\{\ \alpha\lambda_3(\vec{W}^{p+1})_j + \beta\lambda_3(\vec{W}^{p+1/2})\ \} + \tau\phi_2\vec{B}^{p+1/2}. \qquad (20)$$

В качестве нулевой итерации (*i=0, j=0*) выступает решение, построенное по явной схеме метода покомпонентного расщепления . Все неизвестные величины представим в виде сплайн-функций. Применение аппарата сплайн-функций дает возможность записать новые более точные разностные выражения для дифференциальных операторов $\lambda_n(...)$, входящих в состав схемы расщепления. Это позволяет повысить, как минимум на порядок, точность вычислений по координатам [2-4].

Численные результаты. Рассмотрим задачу об определении температурного поля и связанного с ним нестационарного теормо-упруго-пластического напряженно-деформируемого состояния цилиндрического тела. Для определения компонентов тензоров напряжения $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_x, \sigma_{r\varphi}$, деформации $\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_{r\varphi}$ и компонентов вектора скорости перемещений v_r, v_x на полном шаге по времени использовались расчетные формулы метода покомпонентного расщепления повышенной точности. Все искомые величины задавались в форме напряженного сплайна по координатам. При этом температура *T* в каждый момент времени определялась из решения уравнения теплопроводности с учетом величин $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ $(i, j = r, \varphi, x)$, определенных на предыдущем шаге по времени.

На рисунках 1 и 2 показано распределение температуры по радиусу в торце валка блюминга для фиксированных моментов времени. Сплошные линии полученны при помощи метода покомпонентного расщепления повышенной точности, пунктирные – аналитическим, методом и точечные линии – с помощью конечно-разностного метода.

Здесь задавалось $\tau_* = a\tau / h^2 = 0{,}05$, а безразмерное время определялось как $t = n\tau_* \left(n = 0;1;...\right)$. Полученные результаты позволили сравнить вычислительную эффективность примененных методов расчета и сделать такие выводы.

 ISSN 1991-7848

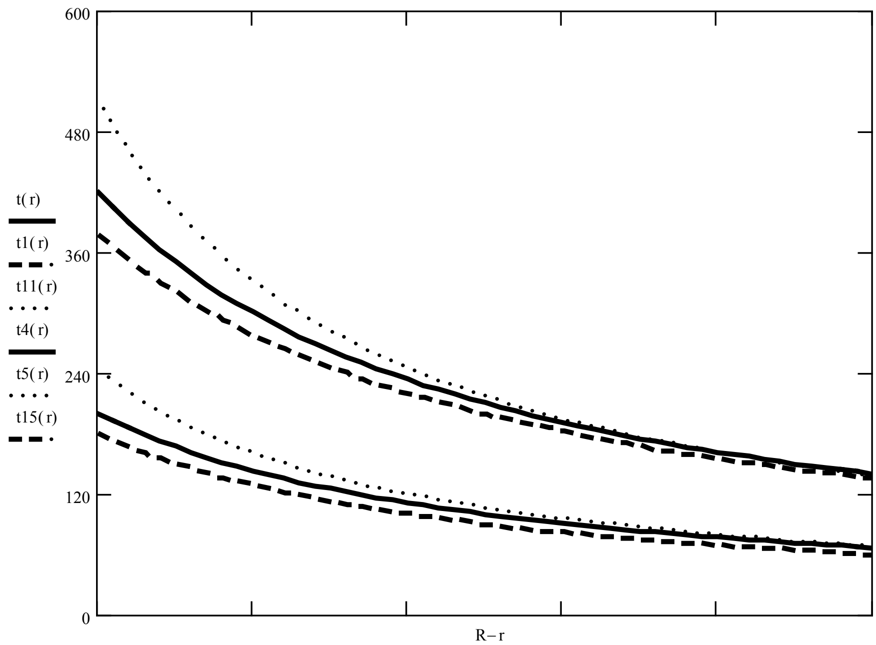

Рисунок 1

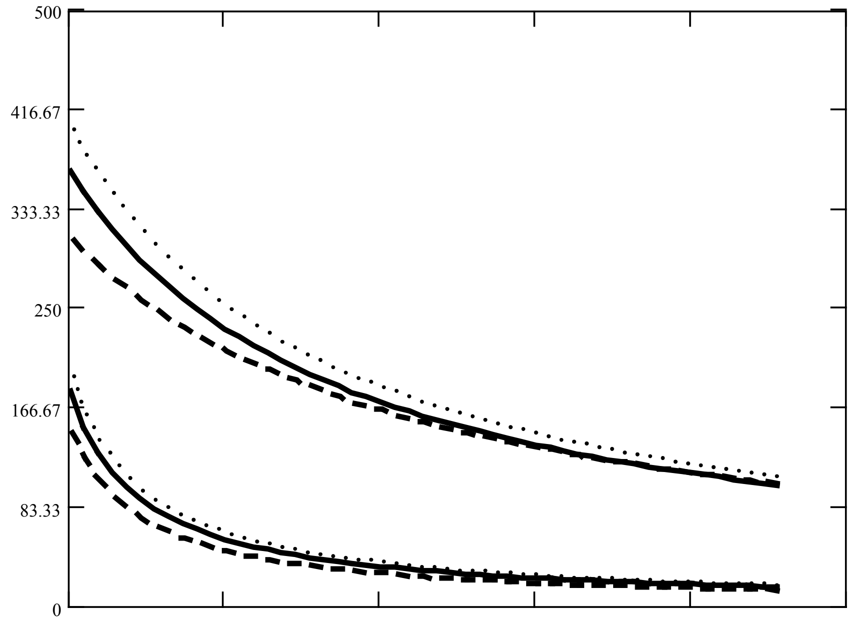

Рисунок 2

Выводы

Расчеты показывают, что интенсивность температурных напряжений в поверхностном слое валков значительно превышает предел текучести материала и, следовательно, является решающим в появлении сетки поверхностных трещин. Валки выдерживают большие напряжения потому, что они являются сжимающими и направлены вдоль оси валка, а также действуют в тонком поверхностном слое. Температура поверхности валка при наиболее длительном времени контакта *(t=0,165 с)* достигает 450°С.

Сравнение результатов с аналогичными результатами, полученными при помощи метода покомпонентного расщепления повышенной точности и конечноразностного метода, показало хорошее совпадение результатов (расхождение по температуре до 3,5%) в окрестности средины валка, а по мере приближения к краю, где состояние является заведомо неодномерным по осевой и радиальной координатам, результаты могут существенно отличаться. В окрестности края валка, для расчетов температурного напряженно-деформированного состояния целесообразно применять метод покомпонентного расщепления повышенной точности, поскольку он дает более точные результаты в узлах пространственной сетки, чем конечно-разностный метод.

Получены рекуррентные формулы неявной схемы метода расщепления для определения температуры, скоростей перемещений, напряжений и деформаций, позволяют получить соответственно третий и четвертый порядок аппроксимации метода по координатам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боли Б., Уэйнер Д. Теория температурных напряжений М.:Мир, 1964. - 517 с.
2. Крылова Т.В., Лигун А.А. Асимптотические оценки погрешности приближения функций интерполяционными напряженными сплайнами // Теория приближения.- Днепропетровск, 1994.-С.63-64.
3. Стеблянко П.А. Пространственные нестационарные задачи теории термоупругопластичности. – К.: ИМ НАН Украины, 1997. – 273 с.
4. Стеблянко П.А. Методы расщепления в пространственных задачах теории пластичности. – Киев: Наукова думка, 1998. – 304 с.
5. Стеблянко П.О., Волосова Н.М. Зв’язана задача для попередньо стиснутого циліндра при крутячому моменті, що циклічно змінюється // Системные технологии.–Вып.2(19).–Днепропетровск. Сист.техн., 2001.–С. 94 – 102.
6. Стеблянко П.О., Волосова Н.М. Урахування ефекту тепловиділення у двумірній нестаціонапрній задачі теорії термопластичності для товстостінного циліндру // Вестник Кременчужского государственного политехн. университета. Вып. 3/2002 (14).-Кременчуг: 2002.-С.133-135.
7. Шевченко Ю.Н., Савченко В.Г. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.2.Термовязкопластичность.–Киев:Наукова думка,1987.–264с.
8. Steblyanko P.A. The method of decomposition in the non-stationary space problems of the theory of plasticity. – K.: SMC HE, 2000. – 159 p.
9. Steblyanko P. A., Volosova N. N. Non-stationary 2D and 3D coupled problems of the theory of thermoplasticity //System technologies. – 2(13).– Dnepropetrovsk, 2001. – P. 174 – 181.

 ISSN 1991-7848