

УДК 004.942:681.518.25

А.И. Михалев, Н.В. Лысая, Д.А. Лысый

ПОИСК КОМПРОМИССА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ НЕЧЕТКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ВЫПЛАВКИ МАРГАНЦЕВЫХ ФЕРРОСПЛАВОВ

Пропонується математична модель для рішення задачі оптимізації складу багатокомпонентної шихти по критерію мінімальної вартості в нечіткій постановці, коли параметри процесу задаються у вигляді інтервалів та описуються функцією приналежності. Проведене оцінювання технологічних параметрів процесу виплавки марганцевих ферросплавів при різних видах експертних оцінок початкових даних процесу.

Рассмотрена задача формирования многокомпонентной шихты оптимального состава по критерию минимальной стоимости при получении ферросплавов заданного состава в нечеткой постановке (параметры процесса задаются в виде интервалов и описываются функциями принадлежности). Проведено оценивание технологических параметров процесса выплавки марганцевых ферросплавов при разных видах экспертных оценок исходных данных.

The problem of optimum composition (to the measure of minimum cost) the parts of multicomponent ferro-alloy charge in the preset chemical boundaries is considered. The algorithm for solving the problem with the parameters of process set as intervals and described by the membership functions is proposed. Evaluation of technological parameters of manganese ferro-alloys smelting process with the different types of expert estimation is conducted.

Поиск новых подходов и совершенствование известных методов оптимизации технологических параметров производства марганцевых ферросплавов являются весьма актуальными задачами. Используемые при этом расчетные методы оптимизации и проводимые исследования процессов должны позволять косвенно определять оптимальные параметры производства ферросплавов, в частности, силикомарганца и ферромарганца [2]. От корректности постановки и точности решения задачи оптимизации в значительной степени зависят расходные показатели процессов получения ферросплавов, качество получаемого продукта.

В то же время рассматриваемые процессы характеризуются априорной и текущей неопределенностью. Априорная неопределенность имеет место в основном из-за невозможности точно определить начальный химический состав компонентов шихты, их извлечение в сплав, а также неточного представления некоторых взаимосвязанных технологических параметров. Как правило, имеются лишь замеры этих параметров в отдельных точках, значения которых могут меняться из-за неоднородности среды. Применение средних и средневзвешенных значений параметров для расчетов может приводить к получению значительно смещенных точечных оценок параметров [1]. Ввиду этого более эффективным подходом является представление имеющейся априорной информации на едином формальном

языке теории нечетких множеств с представлением характеристик взвешивания неточно заданных величин функциями принадлежности [1].

В свою очередь, следует отметить, что интерпретация неопределенных величин как нечетких больше соответствует реальным условиям производства по сравнению с интерпретацией этих величин как детерминированных, либо случайных [4].

Целью работы является поиск компромисса при решении задачи оптимизации параметров выплавки марганцевых ферросплавов в нечеткой постановке (параметры процесса задаются в виде интервалов и описываются функциями принадлежности).

Постановка задачи. Рассмотрим задачу формирования многокомпонентной шихты оптимального состава по критерию ее минимальной стоимости при получении ферросплавов (ферромарганец, силикомарганец, ферросилиций) заданного состава (ДСТУ 3547-97) углеродотермическим процессом в условиях неопределенности при задании исходных параметров процесса. Для решения задач подобного рода в условиях нечеткого задания исходных данных в последнее время успешно применяются методы принятия решений на основе нечеткой логики и интервальных оценок [1, 4].

При постановке задачи выделим величины, которые заданы нечетко.

Ограничения на процентное содержание химических элементов (E_i) в сплаве (силикомарганец, ферромарганец) имеют вид:

$$\underline{E}_i \leq E_i \leq \bar{E}_i, i = \overline{1, M}, \quad (1)$$

где $\underline{E}_i, \bar{E}_i$ - соответственно нижний и верхний пределы содержания i -го химического элемента в сплаве, M – количество химических элементов, на содержание которых в сплаве накладываются ограничения.

Обозначим нечеткую величину, определяющую долевое содержание каждого из компонентов в шихте через $\tilde{X}_j, j = \overline{1, N}$, где N – количество возможных компонентов шихты.

Согласно физическому смыслу задачи переменные \tilde{X}_j не могут быть отрицательными. Кроме того, должно обеспечиваться естественное условие

$$\sum_{j=1}^N \tilde{X}_j = 1, \quad (2)$$

что соответствует одновременной справедливости двух неравенств:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \tilde{X}_j &\leq 1, \\ \sum_{j=1}^N \tilde{X}_j &\geq 1. \end{aligned} \quad (3)$$

С учетом имеющихся ограничений на процентное содержание химических элементов в конечном сплаве, при $M=10$ имеем [2]:

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= \bar{E}_1 - \tilde{E}_{11}\tilde{X}_1 - \tilde{E}_{12}\tilde{X}_2 - \dots - \tilde{E}_{1N}\tilde{X}_N \geq 0, \\
 Y_2 &= -\underline{E}_1 + \tilde{E}_{11}\tilde{X}_1 + \tilde{E}_{12}\tilde{X}_2 + \dots + \tilde{E}_{1N}\tilde{X}_N \geq 0, \\
 Y_3 &= \bar{E}_2 - \tilde{E}_{21}\tilde{X}_1 - \tilde{E}_{22}\tilde{X}_2 - \dots - \tilde{E}_{2N}\tilde{X}_N \geq 0, \\
 Y_4 &= -\underline{E}_2 + \tilde{E}_{21}\tilde{X}_1 + \tilde{E}_{22}\tilde{X}_2 + \dots + \tilde{E}_{2N}\tilde{X}_N \geq 0, \\
 Y_5 &= \bar{E}_3 - \tilde{E}_{31}\tilde{X}_1 - \tilde{E}_{32}\tilde{X}_2 - \dots - \tilde{E}_{3N}\tilde{X}_N \geq 0, \\
 Y_6 &= -\underline{E}_3 + \tilde{E}_{31}\tilde{X}_1 + \tilde{E}_{32}\tilde{X}_2 + \dots + \tilde{E}_{3N}\tilde{X}_N \geq 0, \\
 Y_7 &= \bar{E}_4 - \tilde{E}_{41}\tilde{X}_1 - \tilde{E}_{42}\tilde{X}_2 - \dots - \tilde{E}_{4N}\tilde{X}_N \geq 0, \\
 Y_8 &= -\underline{E}_4 + \tilde{E}_{41}\tilde{X}_1 + \tilde{E}_{42}\tilde{X}_2 + \dots + \tilde{E}_{4N}\tilde{X}_N \geq 0, \\
 Y_9 &= 1 - \tilde{X}_1 - \tilde{X}_2 - \dots - \tilde{X}_N \geq 0, \\
 Y_{10} &= -1 + \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \dots + \tilde{X}_N \geq 0,
 \end{aligned} \tag{4}$$

где \tilde{E}_{ij} , $j = \overline{1, N}$, $i = \overline{1, M}$ - нечеткие заданные значения содержания химических элементов в компонентах шихты.

В случае наложения ограничений на долевые содержания компонентов в шихте вида:

$$\underline{X}_j \leq \tilde{X}_j \leq \overline{X}_j, j = \overline{1, n}, \tag{5}$$

n – количество накладываемых ограничений, к системе уравнений (4) добавляются $n * 2$ неравенств вида:

$$\begin{aligned}
 Y_{1k} &= \underline{X}_k - \tilde{X}_1 - \tilde{X}_2 - \dots - \tilde{X}_N \geq 0, \\
 Y_{1k+1} &= -\overline{X}_k + \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \dots + \tilde{X}_N \geq 0,
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$k = \overline{1, n * 2}.$$

Система (4), (6) избыточна, поскольку количество неизвестных ($\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_N, Y_1, Y_2, \dots, Y_{10+k*2}$) превышает количество уравнений, поэтому, исходя из предположения о допустимости ее решения, система может иметь бесчисленное количество решений [2, 5].

Задача состоит в нахождении неотрицательных допустимых решений, минимизирующих функцию цели:

$$Y_0 = \sum_{j=1}^N C_j \tilde{X}_j \rightarrow \min, \tag{7}$$

где C_j – стоимость j -го компонента шихты.

Введение компромисса. Поскольку при получении металлического сплава используются компоненты шихты, в которых ограниченные элементы сплава находятся в виде оксидов, то для выполнения условий допустимости решения принимается компромисс, состоящий в том, что в

приведенные уравнения вместо долей оксидных компонентов \tilde{X}_j подставляются их эквиваленты \tilde{Z}_j , выраженные через выход металлической части из каждой составляющей шихты. Выход металлической части – коэффициента k_j , $j = \overline{1, N}$, (в долях) из оксидного компонента вычисляется с учетом степени перехода в металл фосфора, марганца, кремния и железа. Выражение для вычисления усредненного значения коэффициента k_j^* имеет вид:

$$k_j^* = \frac{\sum_{i=1}^M E_{ij}^* \cdot \eta_{ij}^*(E_i)}{B}, \quad j = \overline{1, N}, \quad (8)$$

где $E_{ij}^*, \eta_{ij}^*(E_i)$ - усредненные значения соответственно содержания i -го химического элемента и его извлечения в сплав в j -м компоненте шихты; B - коэффициент, учитывающий дополнительный переход в металл железа, углерода, кремния, кальция и алюминия из золы кокса, электродной массы и электродного кожуха.

Учитывая, что химический состав компонентов шихты и степень перехода их в сплав являются нечетко заданными величинами, соответственно и коэффициент выхода металлической части из оксидных компонентов также будет являться нечетко определенным параметром, зависящим от нечетко заданных величин \tilde{E}_{ij} и $\tilde{\eta}_{ij}(E_i)$ и будет определяться выражением:

$$\tilde{k}_j = \frac{\sum_{i=1}^M \tilde{E}_{ij} \cdot \tilde{\eta}_{ij}(E_i)}{B}, \quad j = \overline{1, N}. \quad (9)$$

С учетом (9) содержание элементов в металлической составляющей i -го компонента будет определяться нечеткой величиной

$$\frac{\tilde{E}_{ij} \cdot \tilde{\eta}_{ij}(E_i)}{\tilde{k}_j}. \quad (10)$$

Тогда с учетом (10) балансовые уравнения (4) примут следующий общий вид:

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= \bar{E}_1 - \frac{\tilde{E}_{11} \cdot \tilde{\eta}_{11}(E_1)}{\tilde{k}_1} \tilde{Z}_1 - \frac{\tilde{E}_{12} \cdot \tilde{\eta}_{12}(E_1)}{\tilde{k}_2} \tilde{Z}_2 - \dots - \frac{\tilde{E}_{1N} \cdot \tilde{\eta}_{1N}(E_1)}{\tilde{k}_N} \tilde{Z}_N \geq 0, \\
 Y_2 &= -\underline{E}_1 + \frac{\tilde{E}_{11} \cdot \tilde{\eta}_{11}(E_1)}{\tilde{k}_1} \tilde{Z}_1 + \frac{\tilde{E}_{12} \cdot \tilde{\eta}_{12}(E_1)}{\tilde{k}_2} \tilde{Z}_2 + \dots + \frac{\tilde{E}_{1N} \cdot \tilde{\eta}_{1N}(E_1)}{\tilde{k}_N} \tilde{Z}_N \geq 0, \\
 Y_3 &= \bar{E}_2 - \frac{\tilde{E}_{21} \cdot \tilde{\eta}_{21}(E_2)}{\tilde{k}_1} \tilde{Z}_1 - \frac{\tilde{E}_{22} \cdot \tilde{\eta}_{22}(E_2)}{\tilde{k}_2} \tilde{Z}_2 - \dots - \frac{\tilde{E}_{2N} \cdot \tilde{\eta}_{2N}(E_2)}{\tilde{k}_N} \tilde{Z}_N \geq 0, \\
 Y_4 &= -\underline{E}_2 + \frac{\tilde{E}_{21} \cdot \tilde{\eta}_{21}(E_2)}{\tilde{k}_1} \tilde{Z}_1 + \frac{\tilde{E}_{22} \cdot \tilde{\eta}_{22}(E_2)}{\tilde{k}_2} \tilde{Z}_2 + \dots + \frac{\tilde{E}_{2N} \cdot \tilde{\eta}_{2N}(E_2)}{\tilde{k}_N} \tilde{Z}_N \geq 0, \\
 Y_5 &= \bar{E}_3 - \frac{\tilde{E}_{31} \cdot \tilde{\eta}_{31}(E_3)}{\tilde{k}_1} \tilde{Z}_1 - \frac{\tilde{E}_{32} \cdot \tilde{\eta}_{32}(E_3)}{\tilde{k}_2} \tilde{Z}_2 - \dots - \frac{\tilde{E}_{3N} \cdot \tilde{\eta}_{3N}(E_3)}{\tilde{k}_N} \tilde{Z}_N \geq 0, \\
 Y_6 &= -\underline{E}_3 + \frac{\tilde{E}_{31} \cdot \tilde{\eta}_{31}(E_3)}{\tilde{k}_1} \tilde{Z}_1 + \frac{\tilde{E}_{32} \cdot \tilde{\eta}_{32}(E_3)}{\tilde{k}_2} \tilde{Z}_2 + \dots + \frac{\tilde{E}_{3N} \cdot \tilde{\eta}_{3N}(E_3)}{\tilde{k}_N} \tilde{Z}_N \geq 0, \\
 Y_7 &= \bar{E}_4 - \frac{\tilde{E}_{41} \cdot \tilde{\eta}_{41}(E_4)}{\tilde{k}_1} \tilde{Z}_1 - \frac{\tilde{E}_{42} \cdot \tilde{\eta}_{42}(E_4)}{\tilde{k}_2} \tilde{Z}_2 - \dots - \frac{\tilde{E}_{4N} \cdot \tilde{\eta}_{4N}(E_4)}{\tilde{k}_N} \tilde{Z}_N \geq 0, \\
 Y_8 &= -\underline{E}_4 + \frac{\tilde{E}_{41} \cdot \tilde{\eta}_{41}(E_4)}{\tilde{k}_1} \tilde{Z}_1 + \frac{\tilde{E}_{42} \cdot \tilde{\eta}_{42}(E_4)}{\tilde{k}_2} \tilde{Z}_2 + \dots + \frac{\tilde{E}_{4N} \cdot \tilde{\eta}_{4N}(E_4)}{\tilde{k}_N} \tilde{Z}_N \geq 0,
 \end{aligned} \tag{11}$$

Условие (2) преобразуется к виду:

$$\sum_{j=1}^N \tilde{Z}_j = 1, \tag{12}$$

где \tilde{Z}_j - нечеткая величина, определяющая долю металла, перешедшего в конечный сплав соответственно из оптимального количества i -го компонента шихты.

Функция цели (7) примет вид:

$$Y_0 = \sum_{j=1}^N \frac{C_j}{\tilde{k}_j} \tilde{Z}_j \rightarrow \min. \tag{13}$$

Определив \tilde{Z}_j , перейдем к оксидным компонентам шихты. При этом нечеткие величины долей оксидных компонентов определяются соотношением:

$$\tilde{X}_j = \frac{\tilde{Z}_j}{\tilde{k}_j \sum_{j=1}^N \tilde{Z}_j \tilde{k}_j}, \quad j = \overline{1, N}. \tag{14}$$

Пусть химический состав исходных компонентов шихты определяется таблицей 1, в качестве химических элементов, на которые накладываются ограничения, для силикомарганца выступают P , Mn , Si , Fe , процентное содержание которых (согласно ГОСТ 4756-77, изм. от 1.01.1990 г.) в

полученном силикомарганце определяется соответственно интервалами: [0,05 0,7], [65 75], [15 20], [3 20]. Доли перехода восстановленных элементов из шихты в сплав имеют следующие ограничения:

$$\begin{aligned} \eta_{1\min}(P) &= 0,88, \eta_{1}^*(P) = 0,9, \eta_{1\max}(P) = 0,92; \\ \eta_{2\min}(Mn) &= 0,79, \eta_{2}^*(Mn) = 0,8, \eta_{2\max}(Mn) = 0,82; \\ \eta_{3\min}(Si) &= 0,39, \eta_{3}^*(Si) = 0,4, \eta_{3\max}(Si) = 0,41; \\ \eta_{4\min}(Fe) &= 0,95, \eta_{4}^*(Fe) = 0,95, \eta_{4\max}(Fe) = 0,95. \end{aligned} \quad (15)$$

Таблица 1

Химический состав и стоимость исходных компонентов шихты для выплавки силикомарганца

	Компонент шихты	$P(\underline{E}_1)$	$Mn(\underline{E}_2)$	$Si(\underline{E}_3)$	$Fe(\underline{E}_4)$
1	МФШ	[0,015 0,019]	[40,1 40,9]	[13,4 14,2]	[0,16 0,24]
2	АМнВ-2	[0,2 0,26]	[39,7 39,9]	[11,0 11,8]	[2,5 2,7]
3	Кварцит	[0,0 0,0]	[0,0 0,0]	[44,1 44,5]	[0,0 0,0]
4	АМнВ-1	[0,2 0,26]	[47,0 47,8]	[8,9 9,7]	[2,2 2,4]
5	БАФ	[0,16 0,22]	[42,0 42,8]	[12,2 12,8]	[1,5 1,7]
6	АМнШ	[0,07 0,13]	[37,5 38,5]	[12,6 13,4]	[2,4 2,6]

Оценивание параметров модели. В отличие от существующей практики предварительного получения точечных оценок для каждого параметра на основе различных способов усреднения, в предлагаемом подходе каждый из них задается в виде соответствующей функции принадлежности $\mu_{ij}(\tilde{E}_{ij}), \mu_{ij}(\tilde{\eta}_{ij}), i = 1, M, j = 1, N$.

Предположим, что имеется два вида экспертных оценок: согласно первой, так как нечетко заданные величины определены интервалами $[\underline{E}_{ij}, \bar{E}_{ij}], [\underline{\eta}_{ij}, \bar{\eta}_{ij}]$ и при этом известны наиболее допустимые их значения E_{ij}^*, η_{ij}^* , то наиболее простой аппроксимацией будет линейная и такие параметры удобнее всего характеризовать треугольной функцией принадлежности:

$$\begin{aligned} \mu(x) &= 0, \quad \text{если } x > r, \\ \mu(x) &= \frac{x-l}{c-l}, \quad \text{если } l \leq x \leq c, \\ \mu(x) &= \frac{r-x}{r-c}, \quad \text{если } c \leq x \leq r, \\ \mu(x) &= 0, \quad \text{если } x < l. \end{aligned} \quad (16)$$

x – параметр модели, для которого определяется функция принадлежности, l, c, r – соответственно левая граница треугольника, центр треугольника и его правая граница;

пусть, согласно второй оценке, входные величины описываются колоколообразной функцией принадлежности (17), с параметром K ,

определяющим в (18) ширину функции принадлежности равным 0,15, согласно второй экспертной оценке, данные описываются той же функцией принадлежности (17), а параметр K принимается равным 0.3.

$$\mu(x) = \frac{1}{1 + \left[\left(\frac{x-b}{c} \right)^2 \right]^a}, \quad (17)$$

где b, c - соответственно ширина и центр функции принадлежности; параметр a примем равным 1; ширина функции принадлежности задается выражением:

$$c = K(\bar{x} - \underline{x}), \quad K > 0, \quad (18)$$

где \bar{x}, \underline{x} - соответственно верхняя и нижняя границы интервала [3].

Центр функции принадлежности b входной величины определяется как наиболее допустимое значение этой входной величины:

$$b = \frac{\bar{x} + \underline{x}}{2}, \quad \mu(b) = 1. \quad (19)$$

Результирующие функции принадлежности находятся с использованием численного метода [1]. Все функции $\mu(\tilde{E}_{ij}), \mu(\tilde{\eta}_{E_i}), i=1, M, j=1, N$ достигают значения 1, поэтому отрезок $[0, 1]$ разбивается на α -уровни [13, 71]. Выделим следующие значения α -уровней: $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0,3, \alpha_3 = 0,5, \alpha_4 = 0,8, \alpha_5 = 0,9, \alpha_6 = 1$. Хотя при задании треугольной функции принадлежности можно ограничиться значениями уровней $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0,5, \alpha_3 = 1$, введение дополнительных α -уровней производится для возможности сравнения результатов, полученных по различным экспертным оценкам. После подстановки данных в балансовые уравнения (4), (6), и решения уравнений получаем α -уровни функций принадлежности оптимального решения. Результаты расчета оптимального состава шихты, полученные при задании входных нечетких величин с использованием треугольной и колоколообразной функции принадлежности приведены в таблице 2.

Таблица 2

Рассчитанные α -уровневые множества для функций принадлежности оптимального решения. Долевые части компонентов шихты

α	Треугольная	Колоколообразная, $K = 0.15$	Колоколообразная, $K = 0.3$
0	[0,254 0,236]	[0,254 0,236]	[0,264 0,228]
0,3	[0,252 0,238]	[0,25 0,241]	[0,255 0,236]
0,5	[0,25 0,24]	[0,248 0,242]	[0,251 0,239]
0,8	[0,247 0,243]	[0,247 0,244]	[0,248 0,242]
0,9	[0,246 0,244]	[0,246 0,244]	[0,247 0,243]
1	0,245	0,245	0,245

График функций принадлежности нечеткой выходной величины – долевой части шихты оптимального по стоимости состава, полученной на основе различных видов экспертных оценок, приведен на рис. 1.

Содержание химических элементов \tilde{E}_i , $i = \overline{1, M}$ в сплаве оптимального состава определяется следующими соотношениями:

$$\tilde{E}_i = \frac{\sum_{j=1}^N G\tilde{X}_j \cdot \tilde{E}_{ij} \cdot \tilde{\eta}_{ij}(\tilde{E}_i)}{1000}, \quad i = \overline{1, M}, \quad (20)$$

где $G\tilde{X}_j$ - расход шихтовых компонентов (в кг) на 1 натуральную тонну сплава [4].

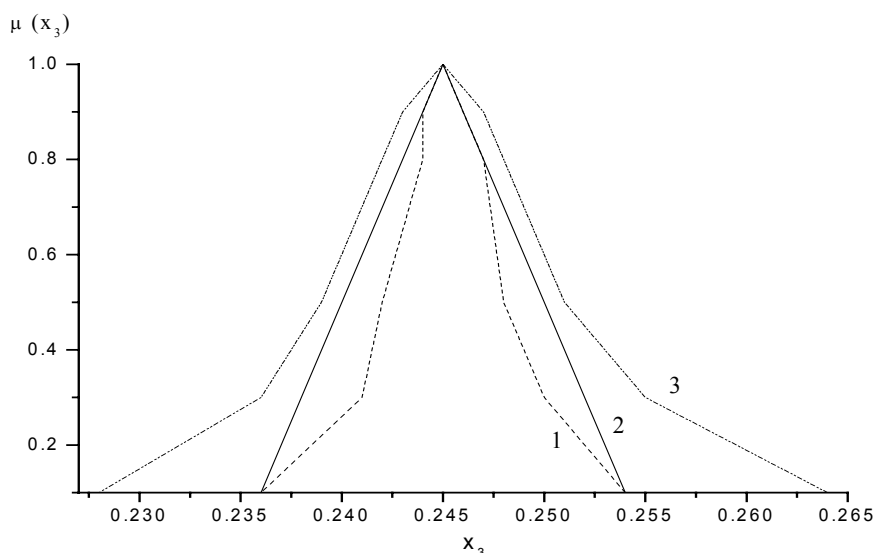


Рисунок 1 - Функции принадлежности $\mu(\tilde{x}_3)$ долевой части компонента шихты кварцита при различных видах экспертных оценок входных переменных: 1, 3 – колоколообразная функция принадлежности вида при K равным соответственно 0.15 и 0.3; 2 – треугольная функция принадлежности

Проведя расчет расходных компонентов шихты по выражению (20), получаем α -уровни функции принадлежности содержания химических элементов в сплаве оптимального состава.

Таблица 3

Рассчитанные α -уровневые множества для функций принадлежности оптимального решения. Химический состав сплава

α	Треугольная	Колоколообразная, $K = 0.15$	Колоколообразная, $K = 0.3$
α	$\sigma_\alpha(P)$	$\sigma_\alpha(P)$	$\sigma_\alpha(P)$
0	[0,365 0,39]	[0,365 0,39]	[0,351 0,4]
0,3	[0,367 0,387]	[[0,371 0,384]	[[0,364 0,39]
0,5	[0,37 0,384]	[0,373 0,381]	[0,369 0,386]
0,8	[0,375 0,38]	[0,375 0,38]	[0,373 0,382]
0,9	[0,376 0,379]	[0,376 0,379]	[0,375 0,38]
1	0,377	0,377	0,377

Заклучение. Использование методов нечеткого вывода при решении задачи формирования многокомпонентной шихты оптимального состава дает возможность получать устойчивое решение в условиях неопределенности информации о параметрах процесса, а также при различных видах экспертных оценок исходных данных.

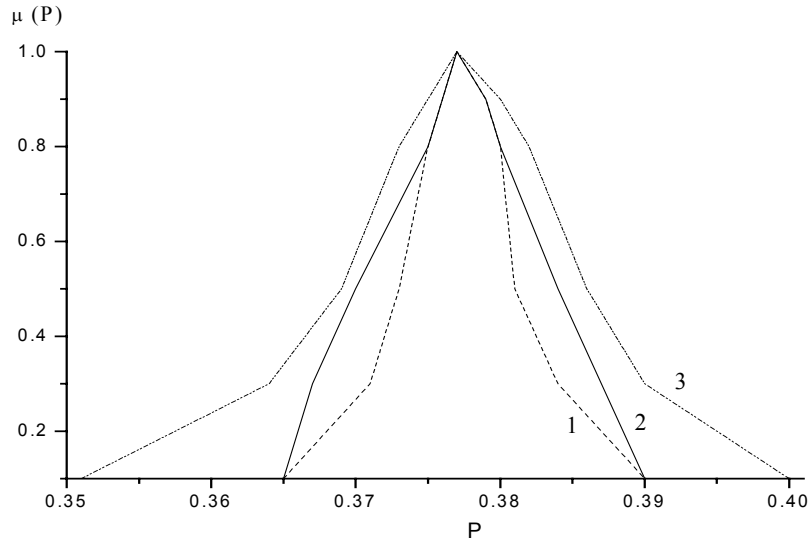


Рисунок 2 - Функции принадлежности содержания фосфора $\mu(P)$ в сплаве оптимального состава при различных видах экспертных оценок

ЛИТЕРАТУРА

1. Алтунин А.Е., Семухин М.В. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях // Монография. - Тюмень: изд-во Тюменского государственного университета, 2000. - 295 с.
2. Гасик М.И., Гладких В.А., Михалев А.И., Лысяя Н.В. и др. Оптимизация состава многокомпонентной шихты углеродовосстановительной плавки ферросплавов // Электromеталлургия. - 1999. - №3. - С. 35-40.
3. Колодяжный В.В. Алгоритм самоорганизации нечеткой системы Сугено // 7-я Международная конференция “Теория и техника передачи, приема и обработки информации”: Сб. науч. трудов. - Харьков: ХТУРЭ, 2001. - С. 406-407.
4. Михалев А.И., Гладких В.А., Лысяя Н.В., Лысенко В.Ф. Оптимизация состава многокомпонентной шихты при выплавке ферросплавов в условиях нечеткого задания исходных данных // Сучасні проблеми металургії. Наукові праці Нац. метал. академії України. - Том 6. - 2003. - С. 183 - 185.
5. Хазан Г.Л. Поиск компромиссов при расчете оптимальной многокомпонентной шихты для металлургического расплава. // Расплавы. 1994. №1. С.67-72.