

К АНАЛИЗУ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НЕСТАЦИОНАРНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ УПРУГОЙ СРЕДЫ

В работе рассмотрено применение метода последовательной аппроксимации к анализу решения задачи о нестационарном деформировании упругой среды под действием переменной внутренней нагрузки. Показана эффективность применения метода для представления решения в виде произведения функций, каждая из которых зависит от одной переменной. Получены формулы, связывающие компоненты напряженного состояния с параметрами задачи. Выполнена сравнительная оценка точности полученных представлений.

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГОЙ СРЕДЫ, МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ.

В роботі розглянуто застосування методу послідовної апроксимації до аналізу рішення задачі про нестационарну деформацію пружного середовища під дією змінного внутрішнього навантаження. Показано ефективність застосування методу для представлення рішення у вигляді добутку функцій, кожна з яких залежить від однієї змінної. Одержано формули, що зв'язують компоненти напруженого стану з параметрами задачі. Виконано порівняльну оцінку точності одержаних уявлень.

НЕСТАЦІОНАРНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ПРУЖНОГО СЕРЕДОВИЩА, МЕТОД ПОСЛІДОВНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ.

The paper is devoted to sequence approximation method used for analyses of dynamic elastically deformed medium solving. The proposed method efficiency is showed on solve transformation into one variable function product. The formulas for stress-strain state components are obtained and an accuracy comparison analysis is made.

DYNAMIC ELASTICALLY DEFORMED MEDIUM, SEQUENCE APPROXIMATION METHOD.

Актуальность и постановка задачи: решение задачи об определении компонент тензора напряжений и перемещений упругой среды под действием переменной внутренней нагрузки вызвана широким использованием эффекта инерционных сил при динамической разгрузки напряженных газонасыщенных сред с целью стимулирования развития в них трещиннообразования и дегазации. Динамические параметры процесса упругого деформирования среды определяются из решения волнового уравнения в одномерной постановке во многих работах [1-4]:

$$r^2 \cdot \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + r \cdot \frac{\partial u_r}{\partial t} - u_r = \frac{r^2}{\nu_p^2} \cdot \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}, \tag{1}$$

где $u_r(r,t)$ – радиальное перемещение упругой среды, м; t – время процесса деформирования, с; ν_p – скорость упругой волны, м/с.

Граничные условия на внутренней и внешней поверхности:

$$\sigma_r|_{r=r_0} = -\psi(t); \quad \sigma_r|_{r=r_N} = 0, \tag{2}$$

где r_0 – внутренний радиус; r_N – внешний радиус.

Однако, несмотря на обилие вариантов решения этого уравнения, простых его решений нет и, как правило, все они громоздки по форме и имеют сложные численные алгоритмы вычисления [1,4].

Зачастую при вычислении интегралов или суммировании рядов приходится иметь дело с особыми точками. Решение в конечном виде может быть представлено интегралом [5], и особые точки (разрывы второго рода) исключают из счета, без ущерба для решения задачи. Если же решение получено в виде ряда и ряд содержит особенности (разрывы второго рода), то используют для решения только часть ряда до особой точки [3]. Особые точки могут существенно ограничить диапазон применения того или иного метода расчета, поэтому их, как правило, исключают из счета до применения численных методов интегрирования. В нашем случае [5], когда подынтегральная функция претерпевает бесконечное количество разрывов, при использовании интегрального преобразования Фурье возникают особенности в трансформантах перемещений и напряжений типа (форме) «тангенса». При выполнении большого количества однотипных вычислительных операций может накапливаться существенная ошибка суммирования. В решении, приведенном в работе [5], имеется возможность напрямую использовать широко опробованные численные методы интегрирования. Так для случая плоской деформации расчет радиальных σ_r и кольцевых σ_θ напряжений можно вести по формулам (3), (4), приведенным в работе [5]:

$$\frac{\sigma_r}{q0} = \frac{2}{\pi \nu_p} \cdot \frac{r0}{(t_2 - t_1)} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_0^{a_i - \delta_i} \overline{\sigma_r} \left(\xi_1, \frac{r}{r0} \right) \cdot \sin[\xi_1 \cdot \bar{t}] \cdot d\xi_1 + \dots + \int_{a_{i-1} + \delta_{i-2}}^{a_i - \delta_{i-1}} \overline{\sigma_r} \left(\xi_1, \frac{r}{r0} \right) \cdot \sin[\xi_1 \cdot \bar{t}] \cdot d\xi_1 \right); \quad (3)$$

$$\frac{\sigma_\theta}{q0} = \frac{2}{\pi \nu_p} \cdot \frac{r0}{(t_2 - t_1)} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_0^{a_i - \delta_i} \overline{\sigma_\theta} \left(\xi_1, \frac{r}{r0} \right) \cdot \sin[\xi_1 \cdot \bar{t}] \cdot d\xi_1 + \dots + \int_{a_{i-1} + \delta_{i-1}}^{a_i - \delta_{i+2}} \overline{\sigma_\theta} \left(\xi_1, \frac{r}{r0} \right) \cdot \sin[\xi_1 \cdot \bar{t}] \cdot d\xi_1 \right); \quad (4)$$

где a_1, a_2, \dots, a_i – координаты разрывов трансформант перемещений или напряжений; $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_i$ – величины отступов от разрывов; $\xi_1 = \frac{\omega \cdot r_0}{\nu_p}$ –

безразмерный параметр преобразования; $\overline{\sigma_r}, \overline{\sigma_\theta}$ – соответственно трансформанты радиальных и кольцевых напряжений; ω – параметр преобразования, $1/c$; $\bar{t} = \frac{\nu_p \cdot t}{r0}$ – безразмерное время процесса; r – текущий

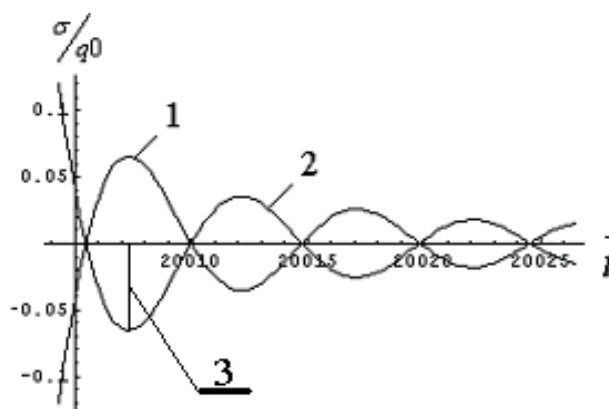
радиус; $t_c = t_2 - t_1$ – реальное время сброса нагрузки, с; $q0$ – внутренняя нагрузка, Па; t_1, t_2 – соответственно время подъема и время сброса нагрузки, отсчитываемое от начала координат, с.

Как видно из (3) и (4), исходные выражения для определения напряжений и перемещений громоздки и неудобны для практического использования [5].

К основным параметрам, оказывающим влияние на процесс нестационарного деформирования упругой среды, можно отнести:

внутренний радиус скважины r_0 , величину приложенной внутренней нагрузки q_0 , скорость упругой волны v_p и время сброса внутренней нагрузки t_c . Оценить степень влияния каждого параметра не просто, поскольку они содержатся перед интегралом и под знаком интеграла.

На практике вызывает значительный интерес зависимость изменения растягивающих радиальных напряжений, возникающих на внутреннем контуре цилиндрической полости, от выше перечисленных параметров. Поскольку многие методы стимулирования разрушения газоносной среды (угля) и дегазации основаны на использовании действия инерционных сил, рассмотрим получение этих зависимостей на участке действия инерционных сил. Характерные графики изменения напряжений (перемещений) во времени после прекращения действия силы имеют вид затухающей синусоиды [5]. Все расчеты и преобразования приведены по отношению к максимальной величине растягивающих радиальных напряжений в первой полуволне изменения напряжений на участке действия инерционных сил (рис. 1).



- 1 – кольцевые безразмерные напряжения
- 2 – радиальные безразмерные напряжения;
- 3 – максимальные радиальные растягивающие напряжения в первой полуволне.

Рис. 1. Изменение радиальных и кольцевых напряжений от времени на участке действия инерционных сил при $v_p = 400$ м/с, $t_c = 0,001$ с, $r = r_0 = 0,1$ м, $r_N = 1000$ м

В общем виде процесс исследования любых процессов с использованием имитационных либо математических моделей (ММ) может быть представлен в виде «черного ящика» (рис.2), где $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор управляющих параметров или переменных модели; Y – результирующий фактор либо функция, аналитический вид которой $Y = Y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ необходимо воссоздать по данным вычислительного эксперимента.



Рис. 2. Представление процесса исследования модели

Модель может быть представлена как физическим устройством, так и совокупностью дифференциальных уравнений, математических формул, программных модулей либо Пакетов Прикладных Программ (ППП), которые ее реализуют.

Результаты исследований процессов с помощью математических моделей, в большинстве случаев, представляют собой массивы или таблицы числовых данных. Восстановление функций, заданных таблицами числовых данных, осуществляется методами аппроксимации на сетке параметров. Для сложных задач процесс получения таблиц значений функции на сетке параметров требует значительных вычислительных затрат, что иногда делает невозможным процесс ее восстановления. Проблема восстановления функции не по значениям ее на сетке параметров, а по меньшему количеству вычислений ее значений была и будет актуальной, независимо от скорости обработки информации современными вычислительными средствами.

Метод последовательной аппроксимации [6,7] позволяет приближенно представлять функцию по результатам ее численного исследования в виде произведения функций, каждая из которых зависит только от одной переменной.

Постановка задачи. Представить решения задачи (3)-(4) в виде простых инженерных формул, удобных для расчета напряжений или перемещений упругой среды при кратковременной разгрузке с применением метода последовательной аппроксимации.

Метод решения. Для решения поставленной задачи воспользуемся методом последовательной аппроксимации [6,7]. Суть метода состоит в том, что функцию, заданную в табличной форме, можно представить в аналитической виде – виде произведения функций, каждая из которых зависит только от одной переменной.

Пусть в общем виде решение (3)-(4) представлено в виде функции $F(X) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенной и непрерывной в замкнутой области \bar{D} . Считаем, что функция F ограничена и имеет частные производные первого порядка, ограниченные в области D . Тогда в окрестности точки $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \bar{D}$ функция $F(X)$ может быть представлена в виде [6,7]:

$$F(X) \approx \varphi(x_1, \dots, x_n) = \alpha \prod_{i=1}^n g_i(x_i), \quad (5)$$

где $g_i(x_i)$ – функции аппроксимации для f_1, f_2, \dots, f_n , заданных в табличной форме.

Указанные функции образуются следующим образом:
 $f_1(x_1) = F(x_1, x_1^0, \dots, x_n^0)$, $f_2(x_2) = F(x_1^0, x_2, \dots, x_n^0)$, ..., $f_n(x_n) = F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n)$.

Как показывает практический опыт, представление функции $F(X) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в окрестности точки $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \bar{D}$ зачастую имеет достаточную для инженерных расчетов точность на всей области определения D .

Алгоритм работы метода состоит в выполнении следующих этапов:

Этап 1. Выбираем точку $M = M(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, $M \in \bar{D}$;

Этап 2. Образует функцию $f_1(x_1) = F(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0)$;

Этап 3. Находим функцию $g_1(x_1)$, которая аппроксимирует функцию $f_1(x_1)$ наилучшим образом;

Этап 4. Находим функцию $\phi_1(x_1)$ согласно с формулой (5):

$$\phi_1(x_1) = \alpha_1 g_1(x_1),$$

где α_1 – коэффициент аппроксимации.

Этап 5. Определяем функцию в окрестности точки M из равенства $F(x_1) \approx \phi_1(x_1)$.

Повторяя действия, приведенные в этапах 2-5 для переменных x_2, x_3, \dots, x_n , получим необходимое представление функции $F(X)$.

Так, согласно (5), для x_2 формула для функции $\phi(x_1, x_2)$ приобретает вид:

$$\phi_2(x_1, x_2) = \alpha_2 g_1(x_1) g_2(x_2),$$

где $\alpha_2 = \frac{F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{g_1(x_1^0)}$.

Для переменной x_3 будем иметь соответственно:

$$\phi_3(x_1, x_2, x_3) = \alpha_3 g_1(x_1) g_2(x_2) g_3(x_3),$$

где коэффициент аппроксимации вычисляется по формуле $\alpha_3 = \frac{\alpha_2}{g_2(x_1^0)}$.

Повторяя этапы 2-5 последовательно для переменных x_j ($j = \overline{2, n}$), получим искомое представление:

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \approx \phi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \alpha_n g_1(x_1) g_2(x_2) \dots g_n(x_n),$$

где значения коэффициентов аппроксимации определяется по формуле

$$\alpha_j = \frac{\alpha_{j-1}}{g_{j-1}(x_{j-1}^0)}.$$

Замечания:

1. Выбор точки $M = M(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, $M \in \bar{D}$ существенным образом влияет на вид восстановленной функции и зависит от поведения исходной функции в ее окрестности. В случае восстановления функций, топографии которых неизвестны, предлагается выбирать опорную точку в центре области определения, то есть координаты ее определять по формуле

$$x_j = \frac{b_j - a_j}{2},$$

где a_j , b_j представляют собой начало и конец интервала изменений параметра x_j .

2. Смысл выполнения этапа 2 состоит в получении функций f_i в табличной форме. Если исходная функция не задана в аналитическом виде, то необходимо организовать ее вычисление для последовательностей значений переменных с определенным шагом. Выбор величины шагов переменных для вычисления значений функции существенным образом влияет на точность ее представления. Выбор шагов переменных зависит от выбора области определения функции и знаний исследователя о физических особенностях изучаемого процесса.

Таким образом, имея простой алгоритм восстановления функций, заданных в табличной форме, остается только применить его для представления формул (3)-(4) в виде произведения функций.

В методе последовательной аппроксимации нет ограничений на выбор класса функций, составляющих произведение. Широкое распространение для представления функциональных зависимостей на практике получил класс степенных функций. Основными преимуществами такого представления являются, во-первых – возможность выполнить оценку степени влияния параметров на саму функцию, во-вторых – определить соответствие физического содержания полученной зависимости свойствам исходной функции процесса. В связи с отмеченными особенностями будем искать представление исходной функции в виде произведения степенных функций.

В качестве функции, представление которой мы ищем, возьмем величину максимальных растягивающих напряжений в первой полуволне ее изменения, отнесенной к величине максимальной амплитуды внутренней нагрузки q_0 :

$$\bar{\sigma}_r = \sigma_r / q_0 = \sigma \left(t_c^{\alpha_1} \cdot \nu_p^{\alpha_2} \cdot r_0^{\alpha_3} \right), \quad (6)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – показатели степени функций исследуемых параметров.

Область определения задана интервалами изменения параметров:

– интервал изменения внутреннего радиуса цилиндрической полости $r_0 - 0,05 \div 0,5$ м;

– скорость упругой волны $\nu_p - 100 \div 2000$ м/с;

– время сброса нагрузки $t_c - 0,001 \div 0,1$ с.

Опорная точка $M = M(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0), M \in \bar{D}$ задана значениями параметров: время сброса $t_c^0 = 0,01$ с; скорость упругой волны $v_p^0 = 600$ м/с; внутренний радиус $r_0^0 = 0,1$ м.

Выполним этапы 2-4 для первого параметра t_c . Изменяя с определенным шагом параметр t_c , вычисляем последовательность значений функции $\bar{\sigma}_r$. Для последовательности $\{t_c, \bar{\sigma}_r\}$ найдем функцию аппроксимации $g_1(t_c)$ в виде: $g_1(t_c) = a_1 t_c^{\alpha_1}$, где $a_1 = 0,00020186$; $\alpha_1 = -0,944$.

Графическое представление выполнения этих этапов представлено на рис. 3.

Таким образом, безразмерные растягивающие напряжения от времени сброса нагрузки t_c будут иметь вид:

$$\bar{\sigma}_r(t_c, v_p^0, r_0^0) \approx \phi_1(t_c) = a_1 t_c^{\alpha_1}. \quad (7)$$

Формулу (7) уже можно использовать в расчетах для определения растягивающих напряжений в зависимости от различного времени сброса (для фиксированных в опорной точке значений параметров v_p^0 и r_0^0).

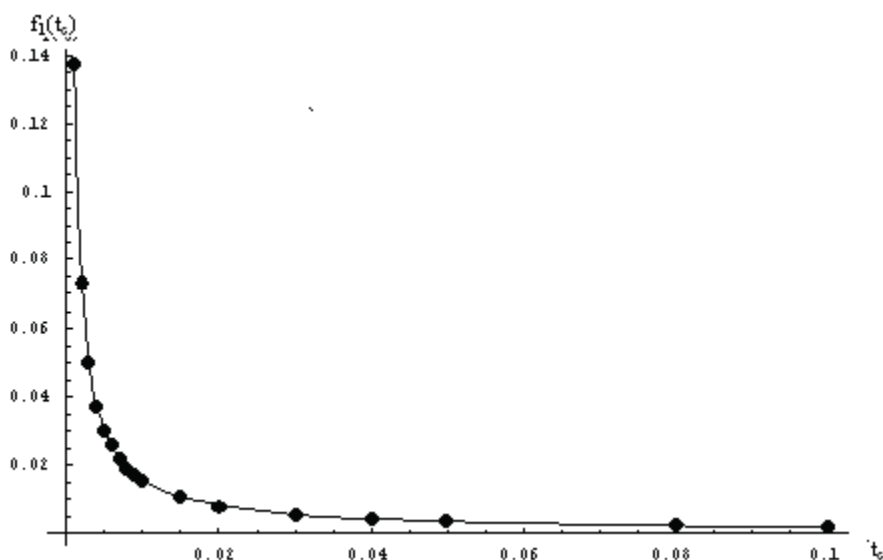


Рис. 3. Функция $f_1(t_c)$ в табличной форме и функция ее аппроксимации

Выполним этапы 2-4 для второго параметра v_p . Изменяя с определенным шагом параметр v_p , вычислим последовательность значений функции $\bar{\sigma}_r$. Для последовательности $\{v_p, \bar{\sigma}_r\}$ найдем функцию аппроксимации $g_2(v_p)$ в виде: $g_2(v_p) = a_2 v_p^{\alpha_2}$ где $a_2 = 0,091318$; $\alpha_2 = -0,957$.

Графическое представление выполнения этих этапов представлено на рис. 4.

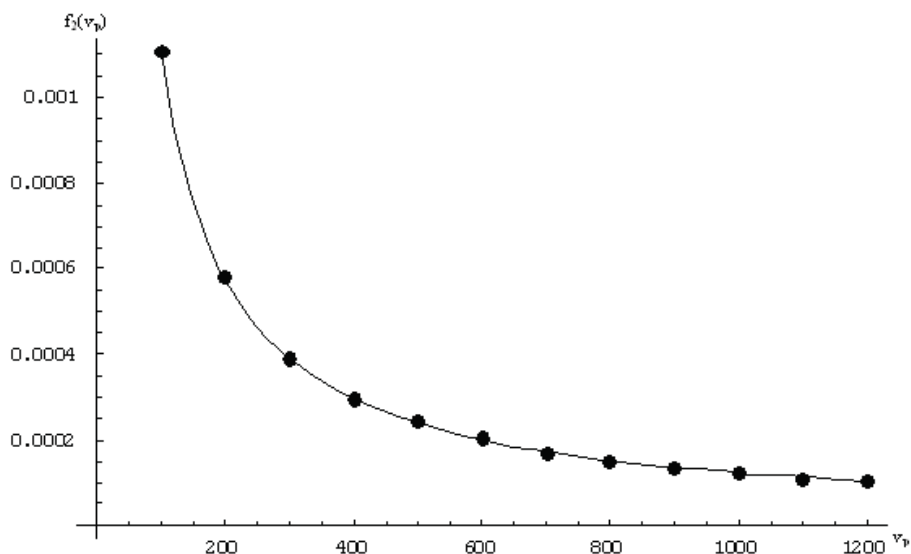


Рис. 4. Функция $f_2(v_p)$ в табличной форме и функция ее аппроксимации

Таким образом, безразмерные растягивающие напряжения от времени сброса t_c нагрузки и скорости упругой волны v_p будут иметь вид:

$$\bar{\sigma}_r(t_c^0, v_p, r_0^0) \approx \phi_2(t_c, v_p) = a_2 t_c^{\alpha_1} v_p^{\alpha_2}. \quad (8)$$

Формулу (8) можно использовать для частных расчетов напряжений при фиксированном значении внутреннего радиуса r_0 .

Выполним этапы 2-4 для третьего параметра r_0 . Изменяя с определенным шагом параметр r_0 , вычислим последовательность значений функции $\bar{\sigma}_r$. Для последовательности $\{r_0, \bar{\sigma}_r\}$ найдем функцию аппроксимации $g_3(r_0)$ в виде: $g_3(r_0) = a_3 r_0^{\alpha_3}$ где $a_3 = 0,91729; \alpha_3 = 1,01$.

Графическое представление выполнения этих этапов представлено на рис. 5.

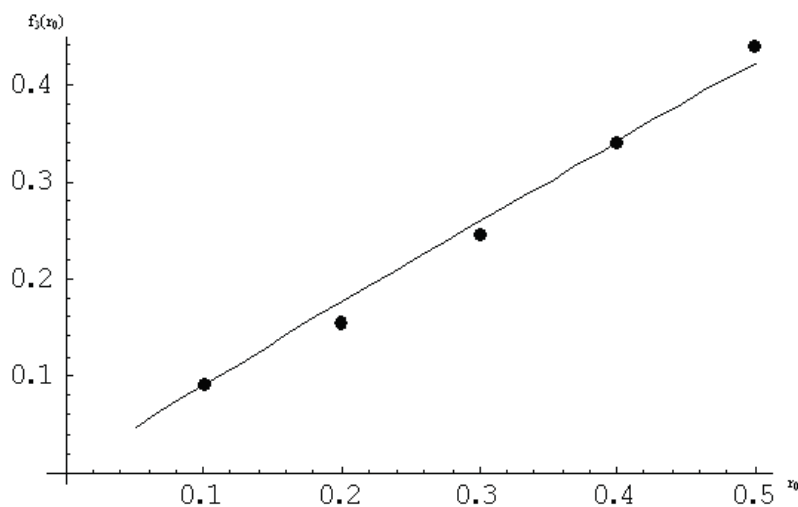


Рис. 5. Функция $f_3(r_0)$ в табличной форме и функция ее аппроксимации

Таким образом, безразмерные растягивающие напряжения от времени сброса t_c нагрузки и скорости упругой волны v_p и внутреннего радиуса r_0 будут иметь вид:

$$\bar{\sigma}_r(t_c^0, v_p^0, r_0) \approx \phi_3(t_c, v_p, r_0) = a_3 t_c^{\alpha_1} v_p^{\alpha_2} r_0^{\alpha_3}. \quad (9)$$

Окончательную формулу (9) для растягивающих радиальных напряжений от всех исследуемых параметров запишем в виде:

$$\sigma_r = 0,917 \frac{q_0^{1,0} \cdot r_0^{1,01}}{v_p^{0,957} \cdot t_c^{0,944}}. \quad (10)$$

Принимая во внимание близость всех показателей степеней исследуемых параметров к единице в выражении (10), получим более удобную формулу для расчетов растягивающих напряжений на внутреннем контуре цилиндрической полости в первой полуволне изменения напряжений в виде:

$$\sigma_r = 0,9 \frac{q_0 \cdot r_0}{v_p \cdot t_c}. \quad (11)$$

Выполнено сравнение относительных погрешностей напряжений, вычисляемых по формулам (10) и (11), с точным решением, полученным по методу интегрального преобразования Фурье [5]. Анализ погрешностей решения (10) показал: средняя погрешность для времени сброса t_c не превышает 3,8 %, для скорости упругой волны v_p – 2,0%, для внутреннего радиуса r_0 – 4,3%.

Анализ результатов сравнения относительных погрешностей напряжений, вычисляемых по формуле (11), с точным решением, полученным по методу интегрального преобразования Фурье, показал, что средняя относительная погрешность для времени сброса не превышает 2,7 %, для скорости упругой волны – 2,2%, а для внутреннего радиуса – 4 %.

Правильность физического содержания полученного решения (11) несложно подтвердить на основании теории размерности.

Согласно теории размерности, неизвестную величину радиальных напряжений на внутреннем радиусе цилиндрической полости можно представить в виде произведения степенных функций [8]:

$$\sigma_r = a_1 \cdot q_0^p \cdot r_0^q \cdot v_p^r \cdot t_c^k, \quad (12)$$

где p, q, r, k – неизвестные показатели степеней; a_1 – безразмерный коэффициент пропорциональности. Приравнивая размерности в левой и правой частях уравнения (12), получим:

$$M \cdot T^{-2} \cdot L^{-1} = M^p \cdot T^{-2p} \cdot L^{-p} \cdot L^q \cdot L^r \cdot T^{-r} \cdot T^k. \quad (13)$$

Составим следующие уравнения для определения показателей степени:

$$p = 1; \quad (14)$$

$$-2 = -2p - r + k; \quad (15)$$

$$-1 = -p + q + r. \quad (16)$$

Имеем три уравнения и четыре неизвестных показателя, подлежащих определению. Из уравнения (14) сразу получаем показатель степени при q_0 , он равен единице.

Из уравнения (15) следует, что показатели степени при v_p и t_c одинаковы – $r = k$. Показатель степени влияния внутреннего радиуса r_0 принимаем, согласно расчетов по формулам (3), (4), равным единице $q = 1$. Следовательно, оставшиеся показатели степени из (16) при v_p и t_c равны, т.е. $r = k = -1$. Таким образом, правильность выбора основных показателей степеней в формуле (11) подтверждается теорией размерности. Однако следует заметить, что теория размерности не всегда дает возможность найти коэффициент пропорциональности, связующий переменные. При использовании метода последовательной аппроксимации он находится сравнительно простым путем.

Следовательно, общая структура формулы (11) полностью подтверждена теорией размерностей, носит характер закономерности для упругих сред, справедлива в широком диапазоне изменения исследуемых параметров и не носит характер частной зависимости.

Выводы:

Проверка погрешностей приближенных представлений функций в аналитическом виде, с использованием метода последовательной аппроксимации [6,7], подтвердила высокую для инженерных расчетов точность в окрестности выбранной точки $M(x^m_1, x^m_2, \dots, x^m_n)$ и хорошую на всей области определения. Анализ результатов задачи дает основания надеяться на эффективное его использование для широкого класса практических задач, представимых в виде «черного ящика».

Таким образом, применение метода последовательной аппроксимации для преобразования сложного решения динамической задачи позволило получить простую формулу, связующую упругие характеристики массива, геометрические параметры упругой среды и параметры нагружения. Пользуясь полученным решением, легко проигрывать различные ситуации при сбросе внутренней нагрузки, варьируя параметрами в диапазоне их изменения для получения нужной величины растягивающих напряжений. Метод последовательной аппроксимации не только позволяет с достаточно высокой точностью установить степень влияния каждого параметра, но и позволяет определить коэффициент пропорциональности, связывающий все переменные при любом их количестве, что весьма трудно сделать, пользуясь теорией размерности.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Айталиев Ш.М. Алгоритм решения задачи о нестационарной нагрузке на отверстие в плоскости методом граничных интегральных уравнений / Ш.М. Айталиев, Н.Б. Жанбырбаев // Известия АН КазССР, серия физико-математическая. – Алма-Ата. – 1983. – 11 с.

2. Кохманюк С.С. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках / С.С. Кохманюк, Е.Г. Янютин, Л.Г. Романенко. – К.: Наукова думка, 1980. – 226 с.
3. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах: учеб. пособие для вузов / А.Н. Крылов. – Л.: Академия наук СССР, 1950. – 369 с.
4. Филиппов А. П. Деформирование элементов конструкций под действием ударных и импульсных нагрузок / А.П. Филиппов, С.С. Кохманюк, Е.Г. Янютин. – К.: Наукова думка, 1978. – 184 с.
5. Сапегин В.Н. Нестационарное деформирование упругой среды под действием переменной внутренней нагрузки/ В.Н. Сапегин //Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць Дніпропетровського національного університету. – 2011.– Вип.17. – С.239-245.
6. Ларіонов Г.І. До аналізу результатів чисельного моделювання / Г.І. Ларіонов // Матеріали Міжнародної наукової конференції «Математичні проблеми технічної механіки – 2010». - Дніпродзержинськ, 2010. – С. 153 (19-22 квітня 2010).
7. Ларіонов Г.І. Оцінювання впливу параметрів математичного моделювання / Г.І. Ларіонов // Матеріали XVIII міжнародної науково-технічної конференції «Прикладні задачі математики і механіки». – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2010. – С. 226-229 (13-17 сентября 2010).
8. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1977 – 440 с.

Отримано: 18.11.2011 р.