

МЕТОД ДВОЙНОГО ШТРАФА В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ

Представлен способ построения вспомогательной функции для решения задачи поиска экстремума функции при ограничениях. Исследуется сходимость алгоритма и представлены результаты численного моделирования.

ЭКСТРЕМУМ, ШТРАФНЫЕ ФУНКЦИИ, ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО, АЛГОРИТМЫ ПОИСКА.

Представлено спосіб побудови допоміжної функції для вирішення завдання пошуку екстремуму функції при обмеженнях. Досліджується збіжність алгоритму і представлені результати чисельного моделювання.

ЭКСТРЕМУМ, ШТРАФНІ ФУНКЦІЇ, ПАРАЛЛЕЛЬНИЙ ПРОСТІР, АЛГОРИТМИ ПОШУКУ.

A method of constructing an auxiliary function for solving the problem of finding the extremum of the function under constraints. We study the convergence of the algorithm and presents the results of numerical simulations.

EXTREME, PENALTY FUNCTIONS, THE PARALLEL SPACE SEARCH ALGORITHMS.

Введение

Многие задачи инженерного проектирования и управления представляют собой задачи исследования оптимальности некоторой целевой функции. При исследовании сложных явлений и процессов, учитывая мультимодальность и зашумленность исследуемых функций, использование отдельных эффективных алгоритмов не всегда приносит желаемую эффективность. Если же на целевую функцию наложены определенные ограничения, то поиск экстремума еще более усложняется.

Основная часть. Метод штрафных функций, как известно, имеет простую и универсальную схему решения задач минимизации на множествах, не совпадающих со всем пространством[1,2].

Основная идея метода заключается в сведении исходной задачи

$$J(x) \rightarrow \inf; x \in E.$$

к последовательности задач минимизации

$$\Phi_k(x) \rightarrow \inf, x \in E_0; k = 0, 1, \dots,$$

где $\Phi_k(x)$ – некоторая вспомогательная функция, а множество $E \in E_0$. При этом функция $\Phi_k(x)$ выбирается таким образом, чтобы с ростом k она мало отличалась от исходной функции $J(x)$ на множестве E и быстро возрастала на множестве $E_0 \setminus E$. Таким образом, быстрый рост $\Phi_k(x)$ вне E приведет к тому, что при больших k нижняя грань этой функции на E_0 будет достигнута в точках, близких ко множеству E , чем и достигается приближение исходной и вспомогательной задач.

Разнообразие штрафных функций дает возможность выбора вспомогательной функции $\Phi(x)$ в виде, обеспечивающим гладкость,

выпуклость и т.п., то есть переформулирует исходные задачи в более простые и удобные для применения известных методов минимизации. Однако в практическом применении штрафных функций могут встретиться серьезные трудности. Хорошее приближение решения можно получить при достаточно больших номерах k или штрафующего коэффициента A_k в задачах (1) и (2):

$$\Phi_k(x) = J(x) + P_k(x) \rightarrow \min, \quad x \in E; k = 0, 1, \dots \quad (1)$$

$$P_k(x) = A_k P(x),$$

$$P(x) = \sum_{i=1}^m (\max\{g_i(x); 0\})^p + \sum_{i=m+1}^s |g_i(x)|^p, \quad x \in E, \quad (2)$$

где $A_k \geq 0$ ($k=0, 1, \dots$), $\lim A_k = \infty$, $p \geq 1$ - некоторое число.

Однако, с увеличением k , свойства функции (1) во многих случаях начинают ухудшаться: функция становится овражной, появляются дополнительные локальные экстремумы и т.п. Если решение задачи минимизации $J(x) \rightarrow \min$ имеет недостаточно хорошее приближение, то приходится применять такие специальные методы, чтобы численное решение не было очень трудоемким и обеспечивало сходимость процесса.

Как известно, задача поиска условной минимизации функции при ограничениях в виде равенств:

$$\begin{aligned} J(x) &\rightarrow \min, \\ h(x) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

сводится к задаче (1) безусловной оптимизации:

$$\begin{aligned} \Phi_k(x) &= J(x) + P_k(x) \rightarrow \min, \\ P_k &= \mu_k \cdot h^2(x), \quad x \in E, \\ \mu_k &> 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Использование методов симметрии, развитые в работе [4], [5], [6] дает возможность построения вспомогательной симметрической функции для решения задачи (4).

Для решения задачи безусловной минимизации функции (4) осуществим построение вспомогательной выпуклой, симметрической относительно векторных аргументов a и b , функции $\Phi(a, b)$ в виде:

$$\Phi(a, b) = 0,5 \left[(a - b)^T (a - b) + \text{grad}^T f(a) \cdot \text{grad} f(a) + \text{grad}^T f(b) \cdot \text{grad} f(b) \right]. \quad (5)$$

Реализовав движение изображающих точек a и b по гиперповерхности функции $\Phi(a, b)$ из произвольного начального состояния (a_0, b_0) , в силу выпуклости функции удастся значительно приблизиться к $\min_{a, b} \Phi(a, b)$. В построении функции $\Phi(a, b)$ содержится штрафующее слагаемое $(a - b)^T (a - b)$, которое заставляет изображающие точки сближаться друг с другом. Таким образом, для решения задачи (1) используется двойной структурный (4) и (5) штраф.

Для минимизации функции $\Phi(a, b)$ может быть использован алгоритм непрерывного градиентного спуска [1], [2] в виде итерационного процесса:

$$x_{k+1}^i = x_k^i - \alpha_k \cdot \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x^i} \Big|_{x_n}, i = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

$$\alpha_k > 0, k=0, 1, \dots$$

или соответствующей (6) системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{da_i}{dt} = -k \cdot \frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial a_i}; a_i(0) = a_{i0}, \quad (7)$$

$$\frac{db_i}{dt} = -k \cdot \frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial b_i}; b_i(0) = b_{i0} \neq a_{i0};$$

где $k > 0, 1 \leq i \leq n$.

Исследуем процедуры (4), (5) и (7) для поиска экстремума квадратичной функции при ограничении в виде равенства:

$$J(x_1, x_2) = 5x_1^2 + x_2^2 - 20x_1 - 6x_2 + 27, \quad (8)$$

$$h(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 1 = 0.$$

Преобразуем задачу (8) в задачу (4):

$$\Phi(x_1, x_2) = 5x_1^2 + x_2^2 - 20x_1 - 6x_2 + 27 + \mu(x_1 + x_2 - 1)^2 \rightarrow \min. \quad (9)$$

График поверхности квадратичной функции (9) с линиями уровня для значения $\mu = 0,1$ представлен на рис.1.

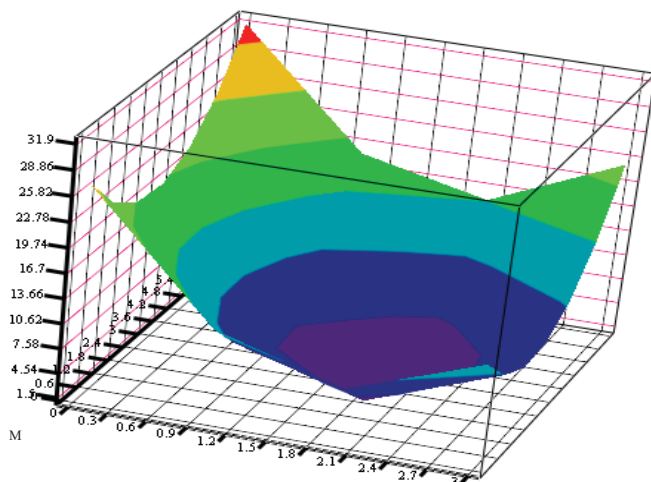


Рис.1 График поверхности функции (9) при $\mu = 0,1$

Строим для функции (9) вспомогательную симметрическую функцию (5):

$$\Phi(a_1, a_2, b_1, b_2) = 0,5 \cdot (q_1(a_1 - b_1)^2 + q_2(a_2 - b_2)^2) + (5a_1^2 + a_2^2 - 20a_1 - 6a_2 + 27 + \mu(a_1 + a_2 - 1)^2 + (5b_1^2 + b_2^2 - 20b_1 - 6b_2 + 27 + \mu(b_1 + b_2 - 1)^2),$$

где $q_1 > 0, q_2 > 0$.

Согласно алгоритму (7), получаем две системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{da_1}{dt} = -ka_1(q_1 + 5) + k(q_1b_1 - \mu(a_1 + a_2) + 10 + \mu), \quad (10)$$

$$\frac{db_1}{dt} = -kb_1(q_1 + 5) + k(q_1a_1 - \mu(b_1 + b_2) + 10 + \mu);$$

при условии $a_1(0) = a_{10}; b_1(0) = b_{10} \neq a_{10}$.

$$\begin{aligned} \frac{da_2}{dt} &= -ka_2(q_2 + 1) + k(q_2b_2 - \mu(a_1 + a_2)) + 3 + \mu \\ \frac{db_2}{dt} &= -kb_2(q_2 + 1) + k(q_2a_2 - \mu(b_1 + b_2)) + 3 + \mu \end{aligned} \quad (11)$$

при условии $a_2(0) = a_{20}, b_2(0) = b_{20} \neq a_{20}$.

Дифференциальные уравнения, описывающие динамику сближения точек (a_1, a_2) и (b_1, b_2) , получим, вычитая из первых уравнений систем (10) и (11) вторые уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d(a_1 - b_1)}{dt} &= (a_1 - b_1)(-2kq_1 - 5k - k\mu) - k\mu(a_2 - b_2), \\ \frac{d(a_2 - b_2)}{dt} &= (a_2 - b_2)(-2kq_2 - k - k\mu) - k\mu(a_1 - b_1); \end{aligned} \quad (12)$$

где $a_1(0) - b_1(0) = a_{10} - b_{10}, a_2(0) - b_2(0) = a_{20} - b_{20}$.

Обозначив: $a_1 - b_1 = y, a_2 - b_2 = z$, получим систему

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= y(-2kq_1 - 5k - k\mu) - k\mu z, \\ \frac{dz}{dt} &= z(-2kq_2 - k - k\mu) - k\mu y; \end{aligned} \quad (13)$$

Составим матрицу коэффициентов для системы (13):

$$A = \begin{vmatrix} -2kq_1 - 5k - k\mu & -k\mu \\ -k\mu & -2kq_2 - k - k\mu \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Так как $\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \Phi \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$ имеем $\Phi = R \cdot e^{jt} R^{-1}$, то для матрицы (14)

получаем:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 2kq_1 + 5k + k\mu & k\mu \\ k\mu & \lambda + 2kq_2 + k + k\mu \end{vmatrix} \quad (15)$$

Характеристическое уравнение матрицы (15) имеет вид:

$\lambda^2 + [(2kq_1 + 5k + k\mu) + (2kq_2 + k + k\mu)]\lambda + [(2kq_1 + 5k + k\mu)(2kq_2 + k + k\mu)] - k^2\mu^2 = 0$,
для которого $\text{Re } \lambda_i < 0$, что гарантирует устойчивое сближение изображающих точек $a_1 - b_1 \rightarrow 0, a_2 - b_2 \rightarrow 0$.

В силу выпуклости функции (9) алгоритм обеспечит достижение минимума вспомогательной функции $\Phi(a, b)$ который будет близок к минимуму функции (8).

Подобно штрафным функциям, барьерные функции позволяют преобразовать задачу условной оптимизации $J(x) \rightarrow \inf; x \in E$ в задачу безусловной оптимизации $\Phi_k(x) \rightarrow \inf, x \in E / \gamma; k = 1, 2, \dots$, где $\gamma \in E$ – подмножество, на котором задана некоторая барьерная функция.

Задача поиска условной минимизации функции при ограничениях в виде неравенств:

$$\begin{aligned} J(x) \rightarrow \min, \\ q(x) \leq 0, \end{aligned} \quad (16)$$

сводится к задаче безусловной оптимизации методом барьерной функции [3]:

$$\Phi_k(x) = J(x) + \alpha_k B(x) \rightarrow \min, \quad (17)$$

где $\{\alpha_k\}$ - положительная последовательность, сходящаяся к нулю, $B(x)$ - барьерная функция, неотрицательная и непрерывная в области $\{x : q(x) < 0\}$ и стремящаяся к бесконечности при приближении к границе области $\{x : q(x) \leq 0\}$.

Типичная барьерная функция имеет вид:

$$B(x) = \sum_{i=1}^m \frac{-1}{q_i(x)}. \quad (18)$$

Таким образом, задача (16) может быть сведена к виду:

$$\Phi_k(x) = J(x) + \alpha_k \sum_{i=1}^m \frac{-1}{q_i(x)} \rightarrow \min. \quad (19)$$

Если в задаче условной оптимизации присутствуют ограничения в виде равенств и неравенств, то для минимизации необходимо использовать смешанную вспомогательную функцию, использующую идеи штрафных и барьерных функций в виде:

$$\Phi_k(x) = J(x) + \alpha_k \sum_{i=1}^m \frac{-1}{q_i(x)} + \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n h^2(x) \rightarrow \min. \quad (20)$$

Применим описанную процедуру к поиску экстремума функции при наличии ограничений двух видов:

$$\begin{aligned} J(x) &= (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \rightarrow \min, \\ h(x) &= x_1 - 2x_2 + 1 = 0, \\ g(x) &= -0,25x_1^2 - x_2^2 + 1 \geq 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Строим вспомогательную симметрическую функцию используя равенства (5) и (20) и применяем алгоритм непрерывного градиентного спуска в виде (6) или (7).

Для значений $\mu = 0,2$; шаге $k=1$; $q_1 = q_2 = 0,95$ и стартовых положений 1,9 и 0,7 результат моделирования представлен на рис. 2.

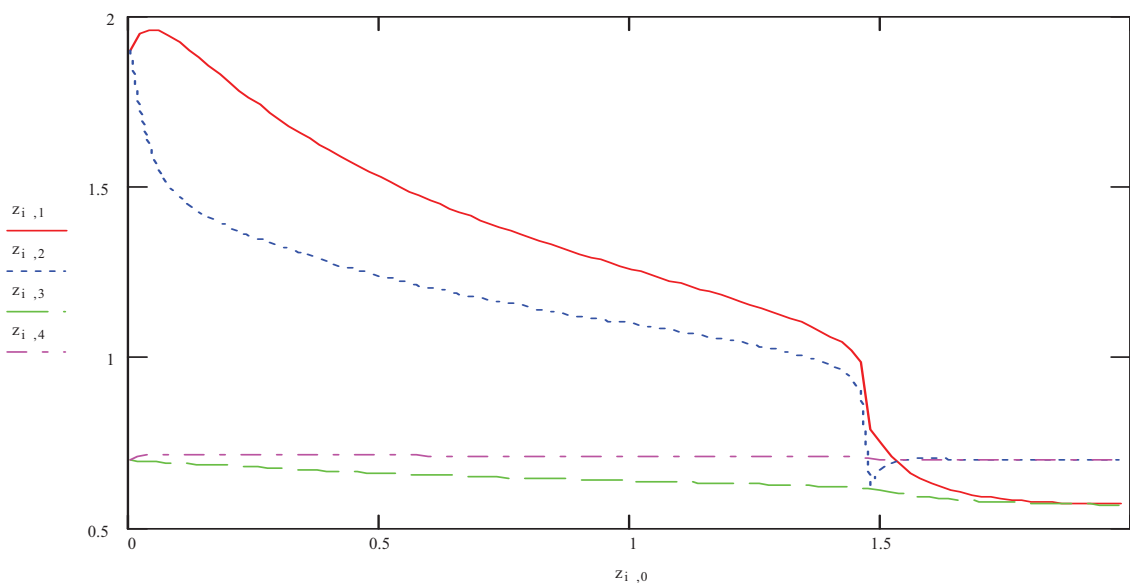


Рис. 2 График процесса моделирования поиска экстремума задачи (21)

Численные результаты окончания процесса моделирования задачи (21) представлены в таблице 1.

Таблица 1

Результаты тестирования функции (21) в соответствии с рис.2

$z_{i,1} =$	$z_{i,2} =$	$z_{i,3} =$	$z_{i,4} =$
0.598	0.701	0.581	0.699
0.593	0.701	0.579	0.699
0.589	0.7	0.577	0.699
0.585	0.7	0.576	0.699
0.582	0.7	0.575	0.699
0.58	0.699	0.574	0.698
0.578	0.699	0.573	0.698
0.576	0.699	0.572	0.698
0.575	0.699	0.571	0.698
0.574	0.698	0.571	0.698
0.573	0.698	0.57	0.698
0.572	0.698	0.57	0.698
0.571	0.698	0.569	0.698
0.57	0.698	0.569	0.698
0.57	0.698	0.569	0.698
0.569	0.698	0.568	0.698

Алгоритм проявляет устойчивую сходимость пар изображающих точек и дает возможность найти экстремум функции.

В реальных задачах для оптимизации рассматриваются функций многих переменных. Если функция имеет сложный рельеф поверхности, то для минимизации имеет смысл использовать параллельное пространство [4],[5],[6]. Для этого строится две вспомогательные симметрические функции вида:

$$F(a, b) = (a - b)^T \cdot Q_1 \cdot (a - b) + f(a) + f(b),$$

и

$$F(c, d) = (c - d)^T \cdot Q_2 \cdot (c - d) + f(c) + f(d). \quad (22)$$

Введем в рассмотрение векторы $y = [a, b]^T$ и $z = [c, d]^T$ для построения новой вспомогательной функции вида:

$$F(y, z) = (y - z)^T \cdot Q \cdot (y - z) + f(y) + f(z), \quad (23)$$

где матрица Q определяется из:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_3 & 0 \\ 0 & Q_4 \end{bmatrix}.$$

Подставив в (23) выражения (22) получим равенство:

$$\begin{aligned} \Phi(a, b, c, d) = & (a - b)^T Q_1 (a - b) + (c - d)^T Q_2 (c - d) + (a - c)^T Q_3 (a - c) + \\ & + (b - d)^T Q_4 (b - d) + f(a) + f(b) + f(c) + f(d). \end{aligned} \quad (24)$$

Поиск экстремума функции (24) может быть осуществлен алгоритмами (6) или (7).

Выводы

Представлен способ построения вспомогательной функции на основе принципа симметрии. Теоретически доказано асимптотическое сближение изображающих точек при решении задачи минимизации функции. Проведенное математическое моделирование подтверждает результаты теоретических исследований. Предложен алгоритм поиска экстремума функции на основе симбиоза методов внешних и внутренних штрафов и принципов симметрии. Показана возможность применения рекурсии для решения такого вида задач. Процедура проста в практической реализации и может быть применена к широкому классу задач минимизации функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию/ Поляк Б.Т. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач/Васильев Ф.П. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
3. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование/Химмельблау Д. – М.: Мир, 1975. – 535с.
4. Корсун В.И. Использование симметрии для распараллеливания процесса поиска экстремума целевой функции в задачах оптимального проектирования и адаптивной идентификации/Корсун В.И. //Мат. Модели и современные инф. технологии. Сб. науч. Тр.НАН Украины. Ин-т математики. – К.:1998. – С.66-68.
5. Корсун В.И. Исследование алгоритма поиска экстремума целевой функции, основанного на применении концепции симметрии и параллельного пространства/Корсун В.И., Демиденко М.А. //Науковий вісник НГА України. – 2000. – №2. – С.101-104.
6. Корсун В.И. Параллельное пространство сопряженных направлений и экстремальные свойства функций/Корсун В.И., Литвиненко К.В. //Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці /Таврійський державний агротехнологічний університет. – Вип..4, т.50. – Мелітополь: ТДАТУ, 2011. – С.90-97.

Получено 19.10.2011 р.