

## ОДНОРОДНЫЙ И АРМИРОВАННЫЙ НИТЯМИ ЭЛАСТИЧНЫЕ ЦИЛИНДРЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ

*В работе рассмотрены однородный и армированный нитями по окружным направлениям эластичные цилиндры под воздействием сил инерции, обусловленных вращением цилиндра вокруг его осевой линии. Для армированного материала принята модель эффективно трансверсально-изотропного материала. Получено решение в конечных формулах и проведено исследование напряженного и деформированного состояния для свободного вращения цилиндра и скользящей посадки его на жесткий вал при различных наполнениях волокнами.*

**АРМИРОВАННЫЙ ЦИЛИНДР, ЦЕНТРОБЕЖНЫЕ СИЛЫ, РАДИАЛЬНЫЕ, ОСЕВЫЕ И ОКРУЖНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ, СВОБОДНОЕ ВРАЩЕНИЕ, СКОЛЬЗЯЩАЯ ПОСАДКА, КОЭФФИЦИЕНТ АРМИРОВАНИЯ.**

*У роботі розглянуті однорідний і армований нитками по окружним напрямкам еластичні циліндри під впливом сил інерції, обумовлених обертанням циліндра навколо його осевої лінії. Для армованого матеріалу прийнята модель ефективно трансверсально-ізоотропного матеріалу. Отримано рішення в кінцевих формулах та проведено дослідження напруженого і деформованого стану для вільного обертання циліндра і ковзної посадки його на жорсткий вал при різних наповненнях волокнами.*

**АРМОВАНІЙ ЦИЛІНДР, ВІДЦЕНТРОВІ СИЛИ, РАДІАЛЬНІ, ОСІВІ І ОКРУЖНІ НАПРУГИ, ВІЛЬНЕ ОБЕРТАННЯ, КОВЗНА ПОСАДКА, КОЕФІЦІЄНТ АРМУВАННЯ.**

*In the article are considered the homogeneous and reinforced with fibers of the circumferential direction elastic cylinders under the influence of inertia forces conditioned by rotation of the cylinder around its main axis. For the reinforced material model of effective transversely isotropic material. A solution is obtained in the final formulas and the exploring was held deflected mode for the free rotation of the cylinder and for it's sliding fit on hard shaft with various filling of fibers.*

**REINFORCED CYLINDER, CENTRIFUGAL FORCES, THE RADIAL, AXIAL AND CIRCUMFERENTIAL STRESSES, FREE ROTATION, SLIDING FIT, THE COEFFICIENT OF REINFORCEMENT.**

### Введение

Эластичные цилиндры, однородные и армированные нитями (волокнами), широко применяются в качестве накопителей кинетической энергии (маховиков), соединительных муфт для «мягкой» передачи тяговых моментов, в качестве уплотнителей валов, элементов разнообразных амортизаторов и т.п. В книге [1] подробно изложены методы расчета и приведены примеры расчета вращающихся однородных дисков и цилиндров. В учебном пособии [2] – теория и методы расчета упругих и вязкоупругих полых цилиндров, работающих в условиях сложных воздействий силовых и других полей. В [3] приведены результаты исследования линейной задачи для однородных цилиндров с подробной библиографией. Цилиндрические тела вращения из жестких композитных материалов в приведены [4]. В статье [6] представлено аналитическое решение задачи о распределении напряжений в равномерно вращающейся

ортотропной трубе. В работе [7] проведены исследования больших деформаций эластичных цилиндров под воздействием центробежных сил на основе нелинейной механики деформирования. В предлагаемой работе проведено исследование зависимости напряженно-деформированного состояния цилиндра, армированного в окружном направлении, под действием центробежных сил от степени наполнения волокнами на основе решения, полученного в конечных формулах.

### Постановка задачи

Изучается центрально-симметричная (плоская осесимметричная) деформация однородного и армированного нитями по окружным направлениям эластичных цилиндров при малых деформациях под воздействием центробежных сил, возникающих при вращении цилиндра вокруг его осевой линии.

Однородный цилиндр и матрица армированного цилиндра из одного и того же изотропного материала. Нити в армированном цилиндре моноотропные и располагаются равномерно. Такие условия позволяют для армированного материала принять модель эффективно трансверсально-изотропного материала с цилиндрической симметрией упругих свойств.

Параметры упругих свойств трансверсально-изотропного материала вычисляли по формулам теории эффективных модулей [5], исходя из упругих параметров материалов матрицы  $(E_m, \nu_m)$ , нитей  $(E_f, \nu_f)$  и объемного наполнения нитями (коэффициента армирования  $k_f$ ):

$$E_1 = \frac{[1 + k_f \cdot (n - 1)] \cdot E_f}{[k_f + n \cdot (1 - k_f)] \cdot [1 + k_f \cdot (n - 1)] - (\nu_m \cdot n - \nu_f)^2 \cdot (1 - k_f) \cdot k_f},$$

$$\nu_1 = \frac{[1 + k_f \cdot (n - 1)] \cdot [\nu_f \cdot k_f + \nu_m \cdot (1 - k_f) \cdot k_f] + (\nu_m \cdot n - \nu_f)^2 \cdot (1 - k_f) \cdot k_f}{[k_f + n \cdot (1 - k_f)] \cdot [1 + k_f \cdot (n - 1)] - (\nu_m \cdot n - \nu_f)^2 \cdot (1 - k_f) \cdot k_f},$$

$$E_2 = E_m \cdot [1 + (n - 1) \cdot k_f], \nu_2 = \nu_m \cdot (1 - k_f) + \nu_f \cdot k_f, n = \frac{E_f}{E_m}. \quad (1)$$

Здесь:  $E_1$  – модуль Юнга для направлений в плоскости изотропии  $(r, z)$ ;  $E_2$  – модуль Юнга из плоскости изотропии  $(r, z)$ ;  $\nu_1$  – коэффициент Пуассона, характеризующий сжимаемость материала в плоскости изотропии при растяжении в той же плоскости;  $\nu_2$  – коэффициент Пуассона, характеризующий сжимаемость материала в плоскости изотропии при растяжении в окружном направлении, ортогональном к этой плоскости.

Для рассматриваемой модели (рис.1) центрально-симметричной деформации цилиндрического тела под воздействием центробежных сил имеют место:

– деформационные соотношения

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{du_z}{dz} = \text{const}; \quad (2)$$

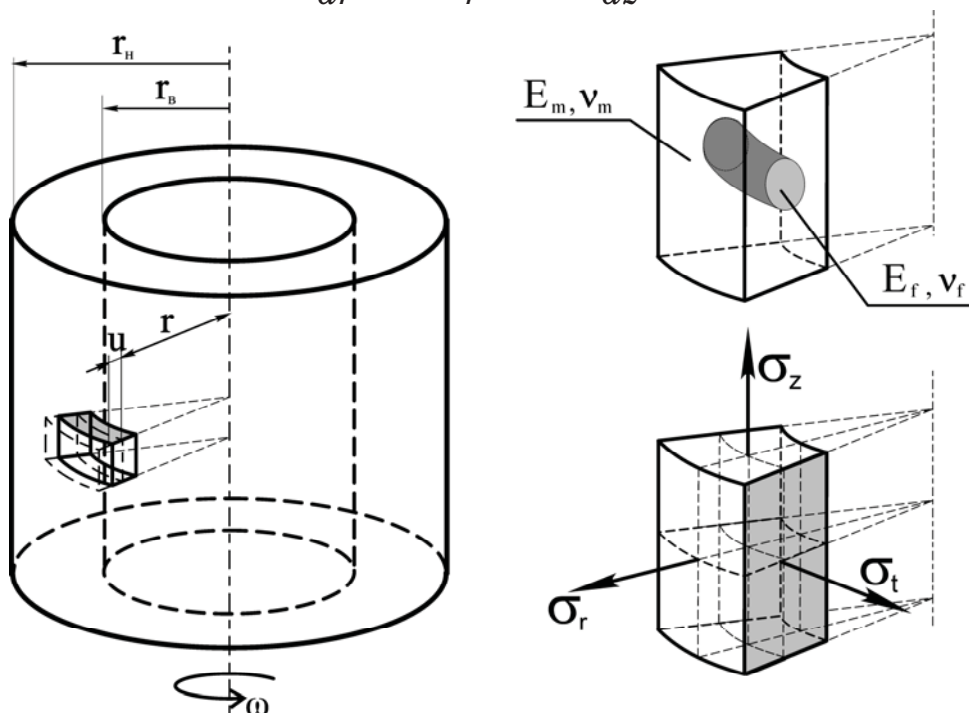


Рис. 1. Принятая модель армированного цилиндра

– соотношения закона Гука

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_1} \sigma_r - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_t - \frac{\nu_1}{E_1} \sigma_z, \quad \varepsilon_t = -\frac{\nu_2}{E_2} \sigma_r + \frac{1}{E_2} \sigma_t - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_z, \\ \varepsilon_z = -\frac{\nu_1}{E_1} \sigma_r - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_t + \frac{1}{E_1} \sigma_z; \quad (3)$$

– нетривиальное уравнение равновесия

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_t + \rho \omega^2 r^2 = 0. \quad (4)$$

Здесь:  $\rho$  – плотность;  $\omega$  – угловая скорость вращения;  $r$  – радиальная координата ( $a \leq r \leq b$ );  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_t$  – радиальная и окружная деформации,  $\varepsilon_z$  – осевая деформация;  $u$  – радиальное перемещение,  $u_z$  – осевое перемещение;  $\sigma_r$ ,  $\sigma_t$ ,  $\sigma_z$  – радиальное, окружное и осевое напряжения соответственно.

#### Алгоритм решения задачи

Исключая из соотношений (2) —(4) переменные состояния  $u$ ,  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_z$ ,  $\sigma_t$ ,  $\sigma_z$ , получаем дифференциальное уравнение второго порядка относительно радиального напряжения  $\sigma_r$ , содержащее постоянную относительно осевую деформацию  $\varepsilon_z$  как постоянную величину:

$$r^2 \cdot \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 3 \cdot r \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{c}{a_2} \sigma_r + \frac{d}{a_2} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r^2 + \frac{a_1}{a_2} \varepsilon_z = 0, \quad (5)$$

где  $a_1 = \nu_1 \cdot E_2 - \nu_2 \cdot E_1$ ,  $a_2 = 1 - \nu_2^2 \cdot E$ ,  $E = \frac{E_1}{E_2}$ ,  $c = a_2 - \frac{(1 - \nu_1^2)}{E}$ ,

$$d = 3 \cdot a_2 + \nu_2(1 + \nu_1),$$

выражения остальных напряжений

$$\sigma_t = r \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r + \rho \cdot \omega^2 \cdot r^2, \quad \sigma_z = \nu_1 \cdot \sigma_r + \nu_2 \cdot E \cdot \sigma_t + E_1 \cdot \varepsilon_z \quad (6)$$

и радиального перемещения

$$u = r \cdot \left( -\frac{\nu_2}{E_2} \sigma_r + \frac{1}{E_2} \sigma_t - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_z \right). \quad (7)$$

Замена Эйлера

$$r = b \cdot e^t \quad (8)$$

приводит (5) к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2 \sigma_r}{dt^2} + 2 \frac{d\sigma_r}{dt} + \frac{c}{a} \sigma_r = -\frac{R \cdot d \cdot E_1}{a} \cdot e^{2t} - \frac{f \cdot E_1}{a} \varepsilon_z, \quad (9)$$

где  $R = \frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot b^2}{E_1}$ ,  $f = \frac{\nu_1}{E} - \nu_2$ .

Решение уравнения (9) а также выражения напряжений  $\sigma_t$ ,  $\sigma_z$  и радиального перемещения  $u$  с учетом (6), (7) выражается в конечных формулах

$$\sigma_r = E_1 \cdot \left( C_1 \cdot s^{k_1} + C_2 \cdot s^{k_2} + R \cdot D \cdot s^2 + G \cdot \varepsilon_z \right), \quad (10)$$

$$\sigma_t = E_1 \cdot \left( -C_1 \cdot k \cdot s^{k_1} + C_2 \cdot k \cdot s^{k_2} + (1 + 3 \cdot D) \cdot R \cdot s^2 + G \cdot \varepsilon_z \right), \quad (11)$$

$$\sigma_z = E_1 \cdot \left( C_1 \cdot n_1 \cdot s^{k_1} + C_2 \cdot n_2 \cdot s^{k_2} + R \cdot l \cdot s^2 + m \cdot \varepsilon_z \right); \quad (12)$$

$$u = b \cdot E \cdot \left( C_1 \cdot m_1 \cdot s^{k_1+1} + C_2 \cdot m_2 \cdot s^{k_2+1} + R \cdot ll \cdot s^3 + lk \cdot \varepsilon_z \cdot s \right), \quad (13)$$

где  $k_1 = -1 - k$ ,  $k_2 = -1 + k$  — корни характеристического уравнения однородной части дифференциального уравнения (9);  $m_1 = -(k + \nu_2 \cdot (1 + n_1))$ ,  $m_2 = k - \nu_2 \cdot (1 + n_2)$ ,  $lk = G - \nu_2 \cdot (G + m)$ ,  $ll = 1 + 3 \cdot D - \nu_2 \cdot (D + l)$ ,

$$D = -\frac{d}{8 \cdot a_2 + c}, \quad G = -\frac{f}{c}, \quad k = \sqrt{\frac{1 - \nu_1^2}{E \cdot a_2}}, \quad n_1 = \nu_1 - \nu_2 \cdot E \cdot k, \quad n_2 = \nu_1 + \nu_2 \cdot E \cdot k,$$

$$l = \nu_1 \cdot D + \nu_2 \cdot E \cdot (1 + 3 \cdot D), \quad m = 1 + G \cdot (\nu_1 + \nu_2 \cdot E), \quad s = \frac{r}{b}.$$

Постоянные  $C_1$ ,  $C_2$  и относительная осевая деформация  $\varepsilon_z$  в (10) – (13) определяются из краевых условий на лицевых поверхностях цилиндра и на торцах.

Рассмотрены два варианта краевых задач: свободное вращение и скользящая посадка. Для обоих вариантов  $C_1$ ,  $C_2$  и  $\varepsilon_z$  можно представить в виде

$$C_1 = D \cdot R \cdot m_{1D} + G \cdot \varepsilon_z \cdot m_{1\varepsilon}, \quad C_2 = D \cdot R \cdot m_{2D} + G \cdot \varepsilon_z \cdot m_{2\varepsilon},$$

$$\varepsilon_z = R \cdot \frac{D \cdot \left( \frac{n_1 \cdot m_{1D}}{k_2} \left( 1 - \tilde{a}^{-k_2} \right) + \frac{n_2 \cdot m_{2D}}{k_1} \left( 1 - \tilde{a}^{-k_1} \right) \right) - \frac{l}{4} \cdot (1 - \tilde{a}^4)}{-G \cdot \left( \frac{n_1 \cdot m_{1\varepsilon}}{k_2} \left( 1 - \tilde{a}^{-k_2} \right) + \frac{n_2 \cdot m_{2\varepsilon}}{k_1} \left( 1 - \tilde{a}^{-k_1} \right) \right) + \frac{m}{2} \cdot (1 - \tilde{a}^2)}, \quad (14)$$

Выражения постоянных  $m_{1D}$ ,  $m_{1\varepsilon}$ ,  $m_{2D}$ ,  $m_{2\varepsilon}$ , входящих в (14), определяются видом краевых условий для каждого из двух вариантов в отдельности.

Из краевых условий для свободного вращения:

– равна нулю результирующая продольная сила  $N$  в поперечных сечениях

$$N = 2 \cdot \pi \cdot \int_a^b \sigma_z \cdot r \cdot dr = 0; \quad (15)$$

– внутренняя лицевая поверхность цилиндра свободна от нагрузки

$$\sigma_r(a) = 0; \quad (16)$$

– наружная лицевая поверхность цилиндра свободна от нагрузки

$$\sigma_r(b) = 0. \quad (17)$$

находим

$$m_{1D} = \frac{1}{d} \cdot \left( \tilde{a}^2 - \tilde{a}^{k_2} \right), \quad m_{2D} = \frac{1}{d} \cdot \left( \tilde{a}^{k_1} - \tilde{a}^2 \right),$$

$$m_{1\varepsilon} = \frac{1}{d} \cdot \left( 1 - \tilde{a}^{k_2} \right), \quad m_{2\varepsilon} = \frac{1}{d} \cdot \left( \tilde{a}^{k_1} - 1 \right), \quad d = \tilde{a}^{k_2} - \tilde{a}^{k_1}, \quad \tilde{a} = \frac{a}{b}. \quad (18)$$

Для скользящей посадки те же краевые условия (15) и (17), а вместо (16) на внутренней лицевой поверхности:

$$u(a) = 0. \quad (19)$$

Для этого варианта получаем:

$$m_{1D} = \frac{1}{d} \cdot \left( \frac{ll}{D} \cdot \tilde{a}^2 - m_2 \cdot \tilde{a}^{k_2} \right), \quad m_{2D} = \frac{1}{d} \cdot \left( m_1 \cdot \tilde{a}^{k_1} - \frac{ll}{D} \cdot \tilde{a}^2 \right),$$

$$m_{1\varepsilon} = \frac{1}{d} \cdot \left( \frac{kl}{G} - m_2 \cdot \tilde{a}^{k_2} \right), \quad m_{2\varepsilon} = \frac{1}{d} \cdot \left( m_1 \cdot \tilde{a}^{k_1} - \frac{kl}{G} \right), \quad d = m_2 \cdot \tilde{a}^{k_2} - m_1 \cdot \tilde{a}^{k_1}.$$

(20)

### Анализ результатов

Получены для указанных двух вариантов краевых задач распределения перемещений и напряжений при квадратном армировании с коэффициентом армирования  $k_f$ , изменяющимся от 0 (цельнорезиновый цилиндр) до своего максимального значения 0,785. Для остальных параметров были приняты следующие значения:  $\omega = 10 \text{ рад/с}$ ;  $a = 0,5 \text{ м}$ ;  $b = 1 \text{ м}$ ;  $\rho = 1,1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ;  $E_m = 4 \text{ МПа}$ ;  $\nu_m = 0,46$ ;  $E_f = 1240 \text{ МПа}$ ;  $\nu_f = 0,4$ . Результаты приведены на рисунках 2-11.

В случае свободного вращения при изменении коэффициента армирования ( $k_f$ ) напряжения и радиальные перемещения изменяются следующим образом.

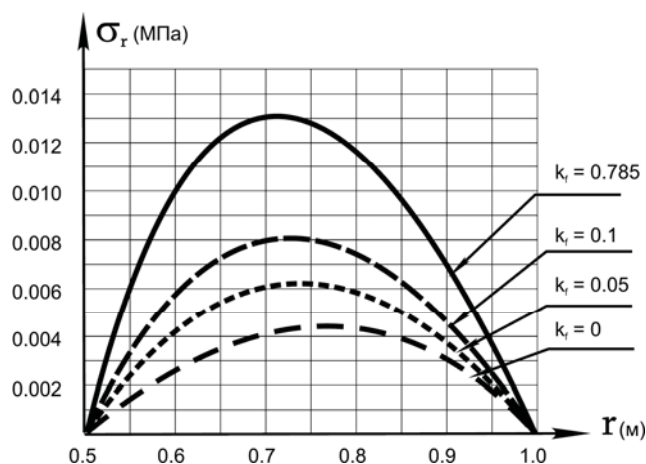


Рис.2. Радиальное напряжение при свободном вращении с разными коэффициентами армирования

Радиальное напряжение  $\sigma_r$  (рис.2) при увеличении  $k_f$  в каждой увеличивается оставаясь всюду растягивающим, положение максимального значения  $\sigma_r$  сдвигается влево.

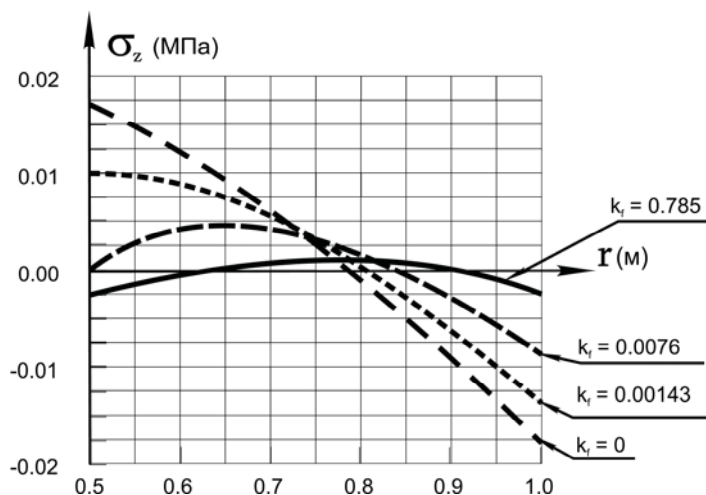


Рис.3. Осевое напряжение при свободном вращении с разными коэффициентами армирования

Осевое напряжение  $\sigma_z$  (рис.3) при любом  $k_f$  изменяет знак и имеет следующий характер распределения по сечению:

– если  $0 \leq k_f \leq 0,0076$ , то знак изменяется один раз (двигаясь от внутреннего контура к наружному напряжению  $\sigma_z$ , переходит из состояния растяжения в состояние сжатия);

– если  $0,0076 \leq k_f \leq 0,785$  – знак меняется два раза (двигаясь от внутреннего контура к наружному  $\sigma_z$  переходит из сжимающего в растягивающее, а затем обратно — в сжимающее).

– при значениях  $0 \leq k_f \leq 0,00143$  алгебраическое значение напряжения  $\sigma_z$  монотонно убывает, принимая максимальное по абсолютной величине значение на наружном контуре

– **максимальное по абсолютной величине значение напряжения  $\sigma_z$  уменьшается с увеличением коэффициента армирования  $k_f$ .**

Окружное напряжение  $\sigma_t$  (рис.4) при всех значениях коэффициента армирования  $k_f$  – растягивающее. Для значений  $0 \leq k_f \leq 0,05$  значение напряжения  $\sigma_t$  монотонно убывает от внутреннего контура к наружному, затем при значениях  $0,05 \leq k_f \leq 0,1$  стремится к равномерному распределению и для остальных  $k_f$  — слабо возрастает.

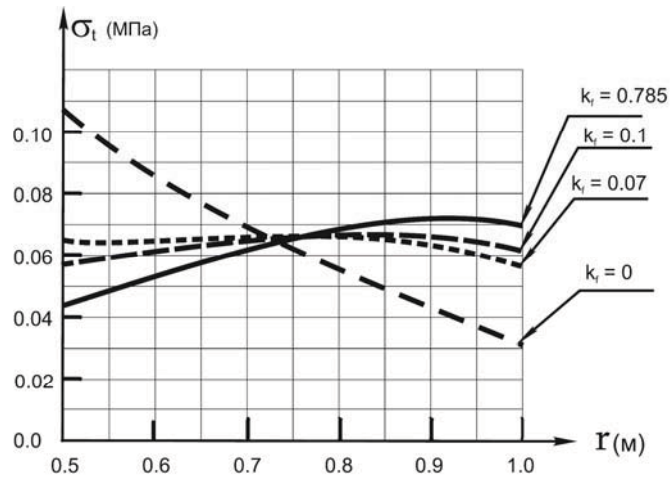


Рис.4. Окружное напряжение при свободном вращении с разными коэффициентами армирования

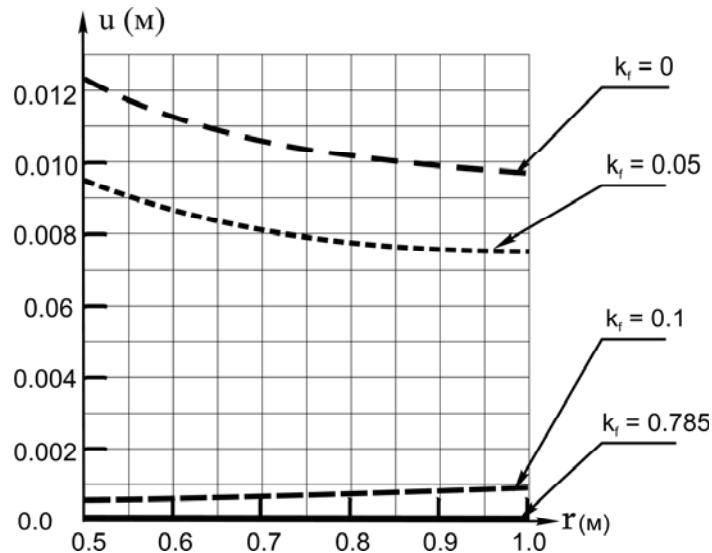


Рис.5. Радиальные перемещения при свободном вращении с разными коэффициентами армирования

Радиальное перемещение  $u$  (рис.5) убывает в каждой точке с увеличением коэффициента армирования. При каждом фиксированном значении  $0 \leq k_f \leq 0,007$  убывает от внутреннего контура к наружному, а при  $0,007 \leq k_f \leq 0,785$  стремится к равномерному распределению.

Для второго варианта краевой задачи (скользящая посадка) изменение коэффициента армирования  $k_f$  дает следующие изменения напряжений и перемещений.

Радиальное напряжение при всех  $k_f$  уменьшается в радиальном направлении от внутреннего контура к наружному, знак не меняет и с увеличением  $k_f$  уменьшается в каждой точке сечения (рис.6).



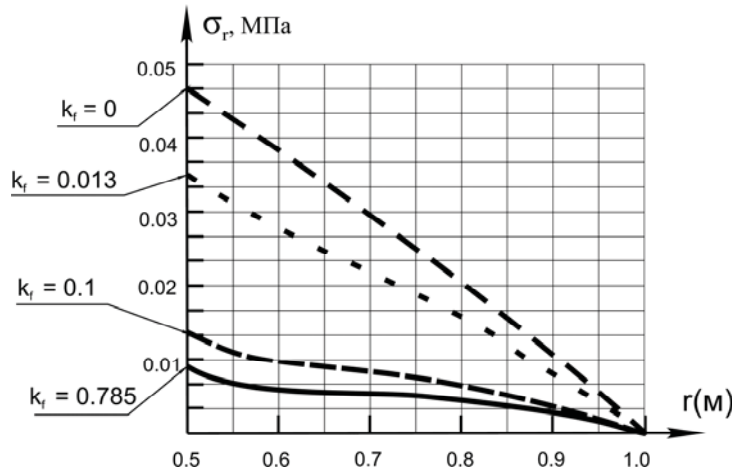


Рис.6. Радиальное напряжение при скользящей посадке с коэффициентами армирования

Осевое напряжение (максимальное по модулю) с увеличением  $k_f$  уменьшается, качественно не меняется, в пределах сечения в радиальном направлении от внутреннего контура к наружному переходит от растягивающего к сжимающему, при этом максимальное растягивающее напряжение приблизительно равно по модулю максимальному сжимающему (рис.7).

Окружное напряжение с увеличением  $k_f$  (максимальное) увеличивается, при этом, в пределах сечения максимальное напряжение перемещается в радиальном направлении от внутреннего контура к наружному и характер распределения меняется с убывающего на возрастающий (рис.8).

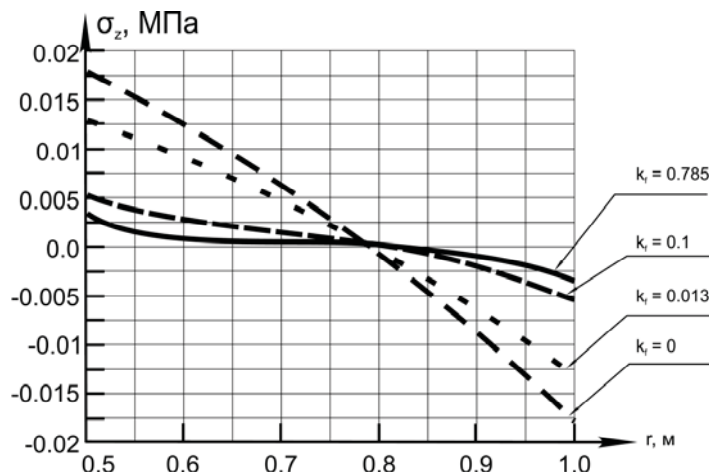


Рис.7. Осевое напряжение при скользящей посадке с коэффициентами армирования

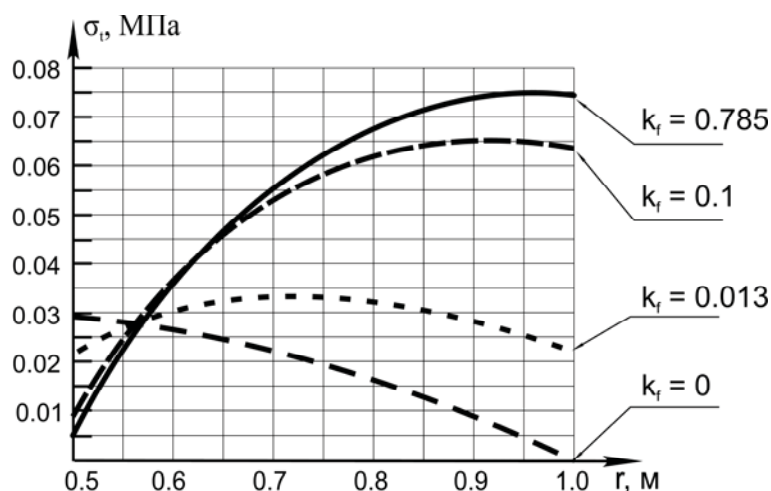


Рис.8. Окружное напряжение при скользящей посадке с коэффициентами армирования

Радиальное перемещение с увеличением  $k_f$  уменьшается в каждой точке сечения и для каждого фиксированного  $k_f$  увеличивается от внутреннего контура к наружному (рис.9).

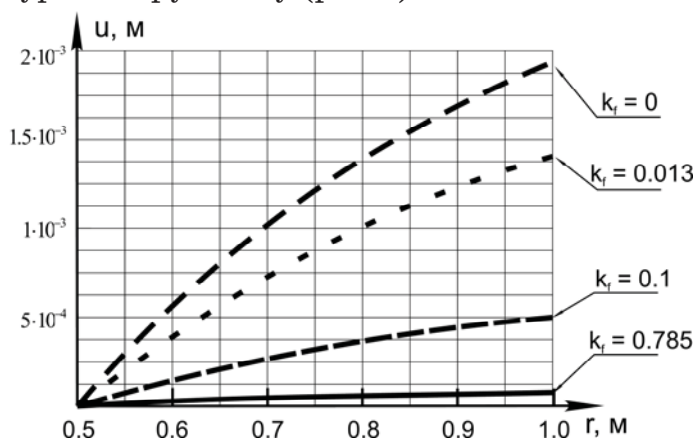


Рис.9 Радиальные перемещения при скользящей посадке с коэффициентами армирования

### Выводы

При свободном вращении с увеличением коэффициента армирования увеличивается радиальное напряжение, уменьшаются осевое и окружное напряжения и радиальное перемещение, для каждого фиксированного коэффициента армирования окружные напряжения значительно больше радиальных и осевых (рис.10), а также при  $k_f \approx 0,05$  распределения всех трех напряжений не сильно отклоняются от равномерных (рис.10-б)

При скользящей посадке с увеличением коэффициента армирования увеличивается максимальное значение окружного напряжения, уменьшаются радиальное и осевое напряжения и радиальное перемещение, для коэффициентов армирования изменяющихся в пределах  $0 \leq k_f \leq 0,013$

для каждого фиксированного из них наибольшим (незначительно) является радиальное напряжение, а для  $0,013 \leq k_f \leq 0,785$  - окружное (рис.11).

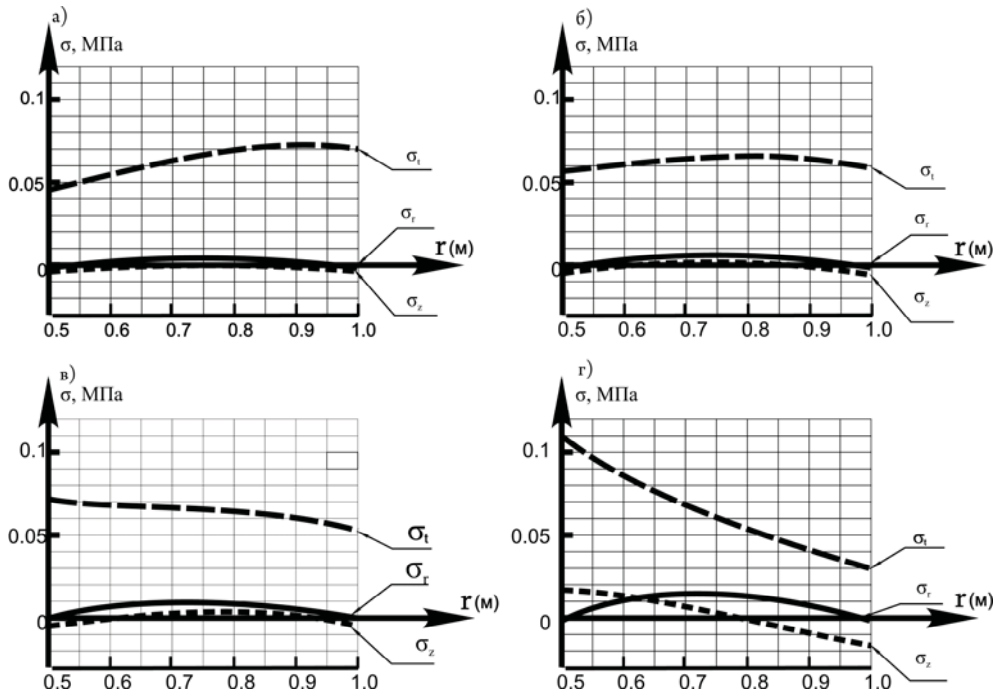


Рис.10. Свободное вращение. Сравнение значений радиального  $\sigma_r$  (————), осевого  $\sigma_z$  (-----) и окружного  $\sigma_t$  (— · — ·) напряжений при фиксированных значениях коэффициента армирования:

а) —  $k_f = 0.785$ , б) —  $k_f = 0.05$ , в) —  $k_f = 0.01$ , г) —  $k_f = 0.0$

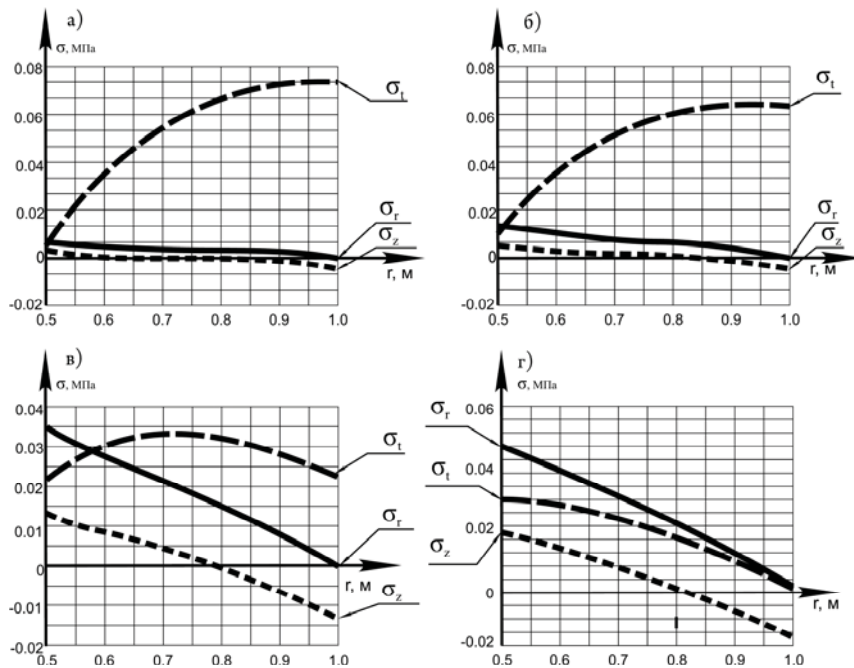


Рис.11 Скользящая посадка. Сравнение значений радиального  $\sigma_r$  (————), осевого  $\sigma_z$  (-----) и окружного  $\sigma_t$  (— · — ·) напряжений при фиксированных значениях коэффициента армирования:

а) —  $k_f = 0.785$ , б) —  $k_f = 0.1$ , в) —  $k_f = 0.013$ , г) —  $k_f = 0.0$

ЛИТЕРАТУРА

1. Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихачев К.К., Макушин В.М., Малинин Н.Н., Феодосьев В.И. Расчеты на прочность в машиностроении. Т.III. МАШГИЗ, Москва 1959.
2. Колтунов М.А., Васильев Ю.Н., Черных В.А. Упругость и прочность цилиндрических тел. Учеб. пособие для вузов. М., «Высш. Школа», 1975. – 526 с.
3. Lцfffer K/ Die berechnug von Rotierenden Scheiben und Schalen. — Gцtttingen: Springer – Verlag OHG, 1961.
4. Композитные материалы: Справочник / Под общ. Ред. В.В. Васильева, Ю.А. Тарнопольского. — М.: Машиностроение, 1990. — 512 с.
5. Tervonen M. and Pramila A. Stresses in a hollow rotating cylindrically orthotropic tube // Mechanics of Composite Materials. — 1996. — Vol. 32, No. 6. — P. 835 – 841.
6. Ахундов В.М., Скрипочка Т.А. Большие деформации однородных и армированных нитями цилиндров под воздействием центробежных сил. // Механика композитных материалов. — 2009. — Т.45, № 3. — С. 347–366.
7. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 572 с.

Получено 16.05.2011 р.