

## МЕТОД КАРКАСНЫХ БЛОКОВ В МЕХАНИКЕ КОМПОЗИТНЫХ СРЕД ПРИ ВЫСОКИХ ГРАДИЕНТАХ СОСТОЯНИЯ

*Представляется метод каркасных блоков численного решения задач механики композитных сред при малых и больших деформациях компонентов среды. Метод может применяться при слабых и высоких макроскопических градиентах состояния среды. Метод включает макромеханический и локально-структурный уровни анализа. Изложение метода производится в дифференциальной форме и форме экстремальной задачи.*

**Ключевые слова:** СРЕДА КОМПОЗИТНАЯ, СРЕДА КУСОЧНО-ОДНОРОДНАЯ, СОСТОЯНИЕ СЛАБОГРАДИЕНТНОЕ, СОСТОЯНИЕ ВЫСОКОГРАДИЕНТНОЕ, УРОВЕНЬ МАКРОМЕХАНИЧЕСКИЙ, УРОВЕНЬ МИКРОМЕХАНИЧЕСКИЙ, ДЕФОРМАЦИИ МАЛЫЕ, ДЕФОРМАЦИИ БОЛЬШИЕ.

*Представлено метод каркасних блоків чисельного розв'язання задач механіки композитних середовищ при малих і великих деформаціях компонентів середовища. Метод може застосовуватися при слабких і високих макроскопічних градієнтах стану середовища. Метод включає макромеханічний і локально-структурний рівні аналізу. Викладення методу проводиться в диференційній формі і формі екстремальної задачі.*

**Ключові слова:** СЕРЕДОВИЩЕ КОМПОЗИТНЕ, СЕРЕДОВИЩЕ КУСКОВО-ОДНОРІДНЕ, СТАН СЛАБОГРАДІЄНТНИЙ, СТАН ВИСОКОГРАДІЄНТНИЙ, РІВЕНЬ МАКРОМЕХАНІЧНИЙ, РІВЕНЬ МІКРОМЕХАНІЧНИЙ, ДЕФОРМАЦІЇ МАЛІ, ДЕФОРМАЦІЇ ВЕЛИКІ.

*Is the method of frame blocks the numerical solution of the mechanics of composite media at small and large deformations of the components of the medium. The method can be used for weak and high gradients of macroscopic state of the environment. The method includes macromechanical and locally-structural levels of analysis. Presentation of the method is performed in a differential form and shape of the extremal problem.*

**Keywords:** COMPOSITE MEDIUM, PIECEWISE HOMOGENEOUS MEDIUM, POORLY-GRADED STATE, HIGH-GRADIENT STATE, MACROMECHANICAL LEVEL, MICROMECHANICAL LEVEL, SMALL DEFORMATION, LARGE DEFORMATION.

### Введение

Предложен метод вычислительной механики композитных сред с высокими градиентами макроскопического состояния при малых и больших деформациях компонентов материала среды – метод каркасных блоков (МКБ). Метод включает два уровня анализа, базирующихся на выделении двух систем (множеств) материальных точек среды. Макромеханический (верхний, первый) уровень анализа основывается на разделении композитной среды на блоки, называемые каркасными, и введении соответствующей совокупности каркасных точек. В качестве каркасных точек принимаются вершины блоков, на которые разделяется композитная среда. Каркасные точки выполняют роль макроточек – точек

дискретизации верхнего уровня анализа. На микромеханическом (нижнем, втором) уровне анализа дискретизации подвергаются (каркасные) блоки среды. Множество каркасных точек является при этом подмножеством микроточек – узловых точек дискретизации нижнего уровня анализа. Соответственно системам макро- и микроточек вводятся в рассмотрение поля каркасных (макроскопических) и материальных (внутренних) перемещений, которые определяют положения точек соответствующих множеств в текущей конфигурации среды. Поле каркасных перемещений выполняет ключевую (определяющую) роль и методологически является первичным, а поле материальных перемещений, как производная поля каркасных перемещений, – вторичным. Макроскопическое и материальное (первого и второго уровней) поля перемещений в условиях высоких градиентов состояния среды определяются на базе дифференциальной или экстремальной формулировок статической либо динамической задачи исследования среды. Применение двухуровневого подхода позволит осуществить эффективную реализацию анализа среды при высоких градиентах состояния, в том числе в условиях внутренней потери устойчивости и проявлений краевого и кромочного эффектов.

### **1. О каркасной теории сред при плавных градиентах макроскопического состояния**

В [1, 2] представлена каркасная теория армированных волокнами сред периодического или квазипериодического строения при малых и больших деформациях. Такие среды рассматриваются как совокупности блоков представления структуры их материала, топология и геометрия которых не меняются или меняются несущественно с переходом от одного блока к смежному с ним другому блоку. Блоки в исходном состоянии представляют собой параллелепипеды, в общем случае косоугольные с плоскими, незначительно или сильно искривленными гранями, соответственно случаям прямых, глобально (слабо) или локально искривленных волокон «базовых» систем армирования материала среды. Точки в вершинах блоков материала выполняют роль «опорных» точек анализа среды и называются каркасными точками среды.

Теория имеет двухуровневый характер и построена на базе объединения макро- и микромеханического подходов в механике композитов. Во главу построения поставлено поле макроскопических перемещений, как исходное ключевое понятие теории. Поле макроскопических перемещений определяет материальные перемещения каркасных точек среды и, вместе с тем, содержание макро-механического уровня анализа. Поле материальных перемещений методологически является производной от поля макроскопических перемещений и определяет перемещения в компонентах материала среды и, вместе с тем, содержание микро-механического уровня анализа.

Общая постановка задачи предполагает несущественное изменение состояния материала среды на расстояниях порядка характерных размеров

структурных блоков, когда состояние среды не является макроскопически высокоградиентным (см. рис. 1). Объединение макро- и микромеханических подходов осуществляется на основе введения узловых точек макромеханического уровня анализа и выделения в их окрестностях узловых структурных блоков. Узловые блоки материала среды выделяются так, что при этом данные узловые точки являются их геометрическими центрами. Узловые блоки макромеханического уровня анализа также называются узловыми макроточками среды. Процедура анализа среды на базе введенной сетки узловых блоков осуществляется в следующей последовательности. На макромеханическом уровне анализа формулируется макрокраявая статическая или динамическая задача, целью которой является определение макроскопического (каркасного) поля перемещений среды. Макрокраявая (глобальная) задача строится на базе уравнений макроскопического движения (или равновесия) среды, выраженных в компонентах макроскопических перемещений и напряжений. Макроскопическое поле перемещений при этом рассматривается как задающее перемещения каркасных точек – вершин структурных блоков среды и, вместе с тем, макроскопическую деформацию среды.

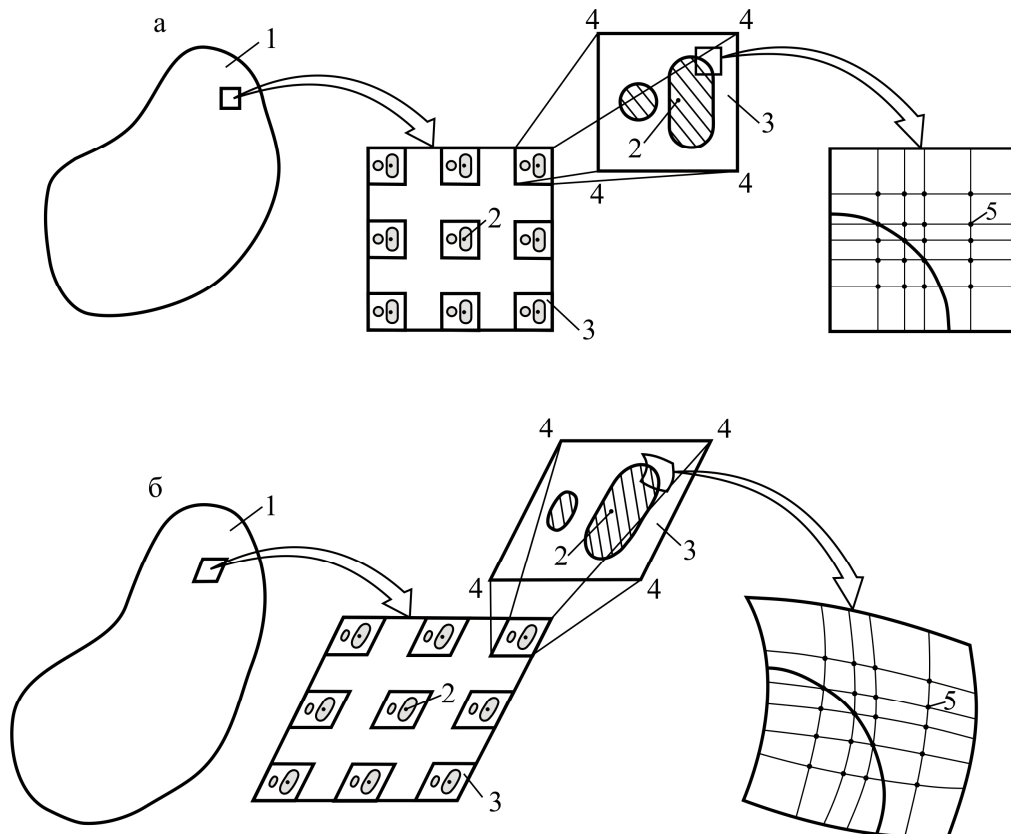


Рисунок 1 – Схема анализа среды композитного материала при больших деформациях с макроскопически плавными градиентами состояния. Представлены элементы схемы в исходном (а) и деформированном (б) состояниях:  
 1 – среда композитного материала; 2 – геометрические центры узловых блоков макромеханического уровня анализа; 3 – узловые блоки макромеханического уровня анализа (для таких блоков выделены элементы структуры);  
 4 – каркасные точки среды; 5 – узловые точки микромеханического уровня анализа.

На локально-структурном, так называемом микромеханическом уровне анализа, для узловых блоков среды формируются микрокраевые задачи. Граничные условия микрокраевых задач определяются значениями компонент макроскопической деформации по месту данных блоков в среде (узловых макроточек). Микрокраевые задачи для узловых блоков формулируются на базе уравнений МДТТ для компонентов материала блоков. Микрокраевые задачи решаются с учетом условий совместного деформирования компонентов материала на основе применения для каждого из узловых блоков сетки узловых точек микромеханического уровня анализа. Такие точки также называются узловыми макроточками среды (блоков представления материала среды). Исходя из информации о полях внутренних (материальных) перемещений среды производится расчет её макроскопических напряжений по месту узловых блоков в зависимости от компонент их макроскопической деформации. Осуществление данной операции позволяет замкнуть систему уравнений микрокраевой (глобальной) задачи. Введенные на базе каркасного поля перемещений понятия макроскопических деформаций и макроскопических напряжений актуальны как при малых, так и больших деформациях компонентов структуры, когда грани блоков испытывают сильные искривления и изламываются на поверхностях раздела составляющих компонентов (см. подробнее [2]).

Преимуществом данного объединения макро- и микромеханического подходов по сравнению с теорией взаимодействия многих деформируемых тел (кусочно-однородной среды) является то, что в первом случае анализа объем вычислений может быть на несколько порядков меньше объема вычислений во втором случае анализа. Объёмы указанных вычислений относятся между собою так, как суммарный объем узловых блоков среды относится к объему среды в целом. Данное соотношение зависит от того, в какой мере состояние среды изменяется с переходом от одного блока структуры к смежному с ним другому блоку.

Преимуществом макро-микромеханического подхода по сравнению с подходом в механике жестких композитов, базирующемся на идее гомогенизации, является наличие микромеханического уровня анализа. Микромеханический уровень анализа позволяет выявлять внутренние поля композитной среды и на их основе осуществлять прочностной анализ – анализ разрушения среды, являющийся одной из основных задач механики композитов. Отметим также и то, что рассматриваемый подход весьма органично осуществляется на основе распараллеливания вычислительной процедуры анализа среды. Благодаря указанным обстоятельствам предложенный путь моделирования композитной среды приобретает практическую ценность и может быть реализован на современных компьютерах достаточно большой вычислительной мощности.

На базе каркасной теории были выполнены исследования композитных материалов с одномерными, двухмерными и

пространственными схемами армирования при малых и больших деформациях матрицы и волокон [3 – 5]. Данная теория также получила свое обоснование на основе проведения расчетных и дублирующих экспериментальных исследований резинокордных материалов [6, 7] и ряда волокнистых тел при малых и больших деформациях материалов матрицы и волокон [8].

## 2. Условия макроскопически высокоградиентного состояния среды

При высоких градиентах макроскопического состояния регулярно армированной среды с периодическим или квазипериодическим строением в исходном состоянии поля перемещений, деформаций и напряжений (внутренние поля) значительно различаются для смежных блоков представления структуры материала среды. На рис. 2 изображена картина высокоградиентного деформирования композитной среды периодического строения при больших деформациях вместо картины плавногоградиентного деформирования среды на рис.1.

В случае больших деформаций среды периодического строения условие высокоградиентного состояния на макроскопическом уровне эквивалентно тому, что в деформированном состоянии строение материала среды становится существенно непериодическим. Блоки представления материала, будучи параллелепипедами (квазипараллелепипедами) в исходном (отсчетном) состоянии, в деформированной (текущей) среде становятся в общем случае существенно неправильными шестигранниками с разными между собой деформациями, искривлениями и изломами противоположных граней.

Для стохастически организованной среды понятие макроскопического градиента состояния не столь четко определяется. Состояние среды статистически однородного строения считаем макроскопически высокоградиентным, если смежные блоки представления структуры с одинаковыми между собой в исходном состоянии размерами (расстояниями между каркасными точками) в деформированном состоянии получают существенно отличающиеся между собою изменения своих соответствующих размеров. В случае больших деформаций стохастической среды для оценки градиентности её состояния на макроуровне можно сопоставлять между собой соответствующие характерные размеры её смежных блоков в деформированном состоянии.

Высокоградиентные состояния реализуются возле граничной поверхности среды в виде краевых и кромочных эффектов, возле поверхностей раздела областей среды с разными строениями (поверхностей разрыва параметров структуры). Такие состояния также реализуются в областях среды, находящих под воздействием внешних поверхностных и объемных сил с высокими градиентами (острыми пиками) макроскопических интенсивностей, когда данные интенсивности

существенно отличаются с переходом от одной блока материала среды к смежному с ним другому блоку. Состояние среды в тех областях, где её строение регулярное, но, вместе с тем, неперiodическое, рассматриваем методологически также как макроскопически высокоградиентное. Такое состояние создается, например, для кругового толстостенного цилиндра с редким расположением по окружному направлению волокон радиальной ориентации и по радиальному направлению волокон окружной ориентации.

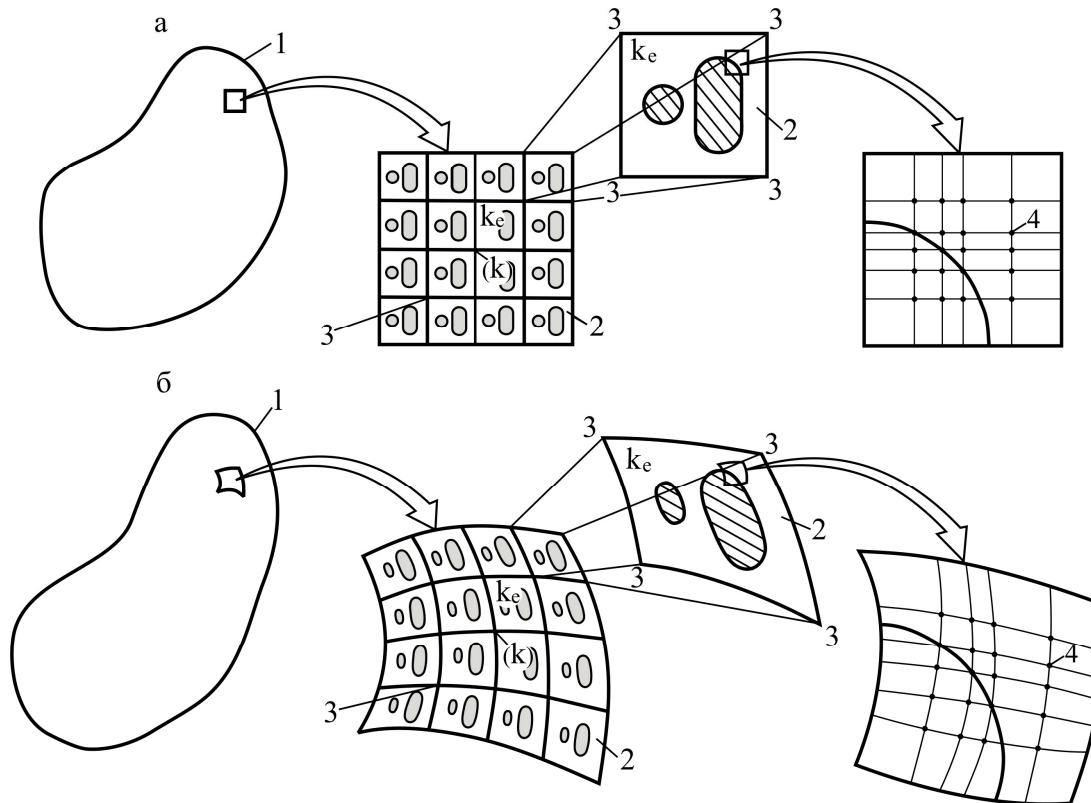


Рисунок 2 – Схема анализа среды композитного материала при больших деформациях с макроскопически высокими градиентами состояния. Представлены элементы схемы в исходном (а) и деформированном (б) состояниях: 1 – среда композитного материала; 2 – блоки среды; 3 – каркасные точки среды (узловые точки макромеханического уровня анализа); 4 – узловые точки микромеханического уровня анализа; (k) – одна из каркасных точек;  $k_e$  – один из блоков окрестности влияния каркасной точки (k).

В условиях высоких градиентов макроскопического состояния среды перестают быть актуальными введенные в [1, 2] понятия макроскопических деформаций и напряжений. Действительно, деформационные соотношения макромеханического уровня анализа, будучи производными поля макроскопических перемещений, характеризуют деформацию в целом каждого из блоков среды периодического (квазипериодического) строения. При малых градиентах состояния среды ее блоки претерпевают макроскопически аффинную трансформацию, при которой «макроскопическая» форма параллелепипеда практически сохраняется в деформированном состоянии. В случае высокоградиентного состояния среды периодического строения макроскопическая форма параллелепипедов

её блоков структуры при больших деформациях не сохраняется. Но тогда понятие тензора макроскопической деформации, как определяющее аффинную деформацию блоков материала, к анализу данного состояния среды неприменимо. Это понятие неприменимо и для высокоградиентного состояния среды при малых деформациях, так как и в этом случае имеют место существенные нарушения условий периодичности по локальным перемещениям (как разницы материальных и макроскопических перемещений). Вместе с понятием макроскопических деформаций становится неприменимым к анализу среды и понятие макроскопических напряжений, как основанное на первом понятии (см. подробнее [1, 2]).

Однако, понятие поля макроскопических (каркасных) перемещений, как определяемого положениями каркасных точек среды, остается актуальным и в условиях высоких градиентов ее состояния. Данное понятие применимо к армированным средам регулярного и стохастического строений и кусочно-однородным средам регулярного и нерегулярного строений.

### 3. Концепция метода каркасных блоков

При анализе на базе рассматриваемого подхода состояния деформируемой среды ее следует разделить на блоки (каркасные блоки). В качестве блоков среды периодического или квазипериодического строения целесообразно принимать блоки, которые состоят из одного или некоторого числа блоков представления материала вместе с их «отсекаемыми» граничной поверхностью среды частями. В случае среды со структурой достаточно мелкого масштаба число блоков представления материала, включаемых блоками среды, может быть весьма большим (особенно для нанокompозитной среды).

В качестве каркасных точек среды принимаем вершины выделенных определенным образом ее каркасных блоков. Поле перемещений, задаваемое перемещениями каркасных точек среды, называем полем каркасных или макроскопических перемещений среды. Расположение каркасных точек имеет регулярный или нерегулярный характер, определяемый строением среды. В представляемом методе вычислительной механики композитных сред с высокими градиентами состояния полю перемещений каркасных точек, как и в случае теории [1, 2], принадлежит ключевая (определяющая) роль.

Метод каркасных блоков включает макро- и микромеханический уровни анализа, на базе которых осуществляется двухуровневая минимализация (экстремализация) функционала состояния среды. Макромеханический уровень анализа заключается в определении поля  $\hat{u}(\hat{\theta}^i, t)$  макроскопических (каркасных) перемещений среды, разделенной на каркасные блоки, задаваемого перемещениями её каркасных точек в вершинах блоков (см. рис.2). Каркасные точки служат узловыми точками дискретной схемы микромеханического уровня анализа. На

микромеханическом (локально-структурном) уровне анализа при определенных на макромеханическом уровне перемещениях каркасных точек последовательно решаются краевые задачи для окрестностей влияния каркасных точек, состоящих из слоев блоков вокруг них (см. п. 4). Краевые задачи для окрестностей влияния каркасных точек решаются на базе модели кусочно-однородного тела методами вычислительной механики деформируемого твердого тела (МДТТ) с использованием узловых точек дискретной схемы микромеханического уровня анализа. В итоге решения краевых задач для окрестностей влияния каркасных точек выявляются внутренние поля каркасных блоков, составляющих среду, и, таким образом, внутренние поля среды в целом.

Определение перемещений каркасных точек и узловых точек локально-структурного анализа осуществляем на основе экстремализации таких функционалов состояния среды, как функционал полной энергии (статическая задача), функционал действия (динамическая задача) либо иной функционал, связываемый с решаемой для среды задачей. При очередном шаге по истории нагружения (деформирования) среды из условий стационарности функционала состояния на макромеханическом (верхнем) уровне анализа определяется поле макроскопических (каркасных) перемещений как совокупность перемещений каркасных точек среды. Каркасное поле перемещений должно при этом удовлетворять граничным и начальным условиям, накладываемым на материальные перемещения среды в данной истории её нагружения. На основе последовательного решения задач локально-структурного (нижнего) уровня анализа для окрестностей влияния каркасных точек определяются внутренние поля среды – поля перемещений, деформаций и напряжений в ее структурных составляющих, как отвечающие перемещениям каркасных точек, найденных на верхнем уровне анализа при заданных граничных и начальных условиях и внешних воздействиях:

$$u_{ni}(\hat{\theta}^i, t) \mathring{r}^i = u_i(\hat{\theta}^i, t) \mathring{r}^i, \quad q_{nij}(\hat{\theta}^i, t) \mathring{r}^i \mathring{r}^j = q_{ij}(\hat{\theta}^i, t) \mathring{r}^i \mathring{r}^j, \quad (3.1)$$

$$J_n \sigma_n^{ij}(\hat{\theta}^i, t) \mathring{r}_i \mathring{r}_j = J \sigma^{ij}(\hat{\theta}^i, t) \mathring{r}_i \mathring{r}_j, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \hat{\theta}^i \in V_n, \quad t_0 \leq t \leq t_k,$$

где  $V_n$  – область среды, занимаемая  $n$ -й структурной составляющей;  $n$  – индекс идентификации структурных составляющих материала среды, как-то: матрицы, систем матричных включений, систем волокон и т.п.;  $u_i$  – компоненты (ковариантные) вектора перемещений;  $q_{ij}$  – компоненты (ковариантные) меры деформации Коши-Грина;  $J \sigma^{ij}$  – компоненты (контравариантные) обобщенного тензора напряжений (симметричного тензора напряжений Пиола-Кирхгофа);  $\mathring{r}_i, \mathring{r}^i$  – основные и взаимные



базисные векторы применяемой системы материальных координат  $\hat{\theta}^i$  в отсчетном состоянии среды.

Информация о внутренних полях (3.1) позволяет в случае статически деформируемой среды найти функционал её полной энергии в виде вкладов функционалов полных энергий блоков среды. Данный функционал при больших перемещениях и деформациях следует определять на основе пошаговой процедуры, производимой в соответствии с последовательностью нагружения среды, когда  $t$  выполняет роль параметра или совокупности параметров нагружения среды. В условиях обратимой (упругой) деформируемости компонент материала и консервативного (потенциального) характера внешних сил функционал полной энергии армированной среды представляем в виде

$$I|_s = \sum_e I_e|_s = \sum_e \sum_n I_{en}|_s = \sum_e \sum_n \int_{V_{en}} \Phi_n[q_{ij}|_s] dV_{en} + \sum_e \sum_n \int_{V_{en}} \rho P_n[u_i|_s] dV_{en} + \sum_e \sum_n \int_{A_{(\sigma)en}} \Pi_n[u_i|_s] dA_{(\sigma)en}, \quad (3.2)$$

$$q_{ij} = \dot{q}_{ij} + \dot{\nabla}_i u_j + \dot{\nabla}_j u_i + \dot{\nabla}_i u_\alpha \dot{\nabla}_j u^\alpha, \quad s = 1, 2, \dots$$

Здесь  $I|_s$  – значение функционала полной энергии среды в объеме  $V$  с граничной поверхностью  $A$  на  $s$ -шаге нагружения (деформирования);  $I_e|_s$  – значение функционала полной энергии  $e$ -блока среды в объеме  $V_e$  на  $s$ -шаге нагружения;  $I_{en}|_s$  – значение функционала полной энергии  $n$ -й компоненты материала в пределах  $e$ -блока среды в объеме  $V_{en}$  на  $s$ -шаге нагружения;  $\Phi_n$  – упругий потенциал  $n$ -й компоненты материала;  $q_{ij}$  – компоненты меры деформации Коши–Грина;  $\dot{\nabla}_i$  – символ ковариантной производной по координате  $\hat{\theta}^i$  в метрике отсчетной конфигурации;  $P_n$  – потенциальная функция плотности массовых сил для  $n$ -й компоненты материала;  $\Pi_n$  – потенциальная функция плотности поверхностных сил, отнесенных к единице площади в отсчетном состоянии для  $n$ -й компоненты материала с гранью  $A_{(\sigma)en}$  в части граничной поверхности среды  $A_\sigma$ , через которую среда нагружается. Величины на  $s$ -шаге нагружения среды отмечены « $s$ » в качестве нижнего индекса. Для компонент вектора перемещения  $u_i$  и меры деформации  $q_{ij}$  номер  $n$ -й компоненты (фазы) материала как и в (3.1) опускается.

В условиях необратимого деформирования компонентов структуры под воздействием консервативных и неконсервативных внешних сил следует перейти к инкрементальному определению функционала полной энергии,

позволяющему помимо истории (последовательности) деформирования среды учитывать и историю деформирования ее материала [9]. Инкрементальный функционал для среды в целом записываем как сумму соответствующих инкрементальных функционалов для блоков среды, а в свою очередь последние функционалы – в виде суммы соответствующих вкладов для компонентов блоков:

$$\begin{aligned} \Delta I|_{s+1} &= \sum_e \Delta I_e|_{s+1} = \sum_e \sum_n \Delta I_{en}|_{s+1} = \\ &= \sum_e \sum_n \left[ \int_{V_{en}} \left( J\sigma^{ij}|_s + \frac{1}{2} \Delta(J\sigma^{ij})|_{s+1} \right) \Delta \varepsilon_{ij}|_{s+1} dV_{en} - \right. \\ &- \int_{V_{en}} \rho_n \left[ F^i|_s + k_f \Delta F^i|_{s+1} \right] \Delta u_i|_{s+1} dV_{en} - \int_{A_{(\sigma)en}} \left[ \sigma^i|_s + k_\sigma \Delta \sigma^i|_{s+1} \right] \Delta u_i|_{s+1} dA_{(\sigma)en} - \\ &- \left. \int_{A_{(c)en}} \left[ (\sigma_v|_s + \Delta \sigma_v|_{s+1}) \Delta u_v|_{s+1} + (\sigma_\tau|_s + \Delta \sigma_\tau|_{s+1}) \Delta u_\tau|_{s+1} \right] dA_{(c)en} \right], \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \Delta q_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \overset{\circ}{\nabla}_i (\Delta u_j) + \overset{\circ}{\nabla}_j (\Delta u_i) + \overset{\circ}{\nabla}_i (\Delta u_\alpha) \overset{\circ}{\nabla}_j u^\alpha + \overset{\circ}{\nabla}_i u_\alpha \overset{\circ}{\nabla}_j (\Delta u^\alpha) + \right. \\ &+ \left. \overset{\circ}{\nabla}_i (\Delta u_\alpha) \overset{\circ}{\nabla}_j (\Delta u^\alpha) \right], \quad s = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Здесь  $J\sigma^{ij}$  и  $\Delta(J\sigma^{ij})$  – компоненты обобщенного тензора напряжений на  $s$ –шаге инкрементального нагружения и их приращения на последующем  $s+1$ –шаге нагружения, которые определяются с учетом истории предшествующего деформирования;  $u_i(u^i)$  и  $\Delta u_i(\Delta u^i)$  – компоненты вектора перемещения на предыдущем шаге нагружения и их приращения на последующем шаге нагружения;  $\Delta \varepsilon_{ij}$  и  $\Delta q_{ij}$  – приращения компонент  $\varepsilon_{ij}$  и  $q_{ij}$  тензора деформации Коши–Грина и тензора меры данной деформации на  $s+1$ –шаге нагружения;  $F^i$  и  $\Delta F^i$  – компоненты вектора массовых сил на предыдущем шаге нагружения и их приращения на последующем шаге;  $\sigma^i$  и  $\Delta \sigma^i$  – компоненты вектора интенсивности поверхностных сил в части граничной поверхности  $A_{(\sigma)}$  на предыдущем шаге нагружения и их приращения на последующем шаге, отнесенные к площади в отсчетном состоянии;  $k_f$  и  $k_\sigma$  – коэффициенты, определяемые характером объемных и поверхностных сил соответственно;  $\sigma_v$ ,  $\sigma_\tau$ ,  $u_v$ ,  $u_\tau$  и  $\Delta \sigma_v$ ,  $\Delta \sigma_\tau$ ,  $\Delta u_v$ ,  $\Delta u_\tau$  – напряжения и перемещения в поверхности и из поверхности контактного взаимодействия  $A_{(c)}$  на предыдущем шаге и их приращения на последующем шаге (поверхность контактного взаимодействия  $A_{(c)}$  среды с другими телами итерационно уточняется на основе применяемого закона

контактного взаємодія, в т.ч. при наявності тріння). (Подробнее об інкрементальному функціоналі  $\Delta I|_{s+1}$  см. [9].)

В случає динамічно деформовуємої среды дослідження її руху здійснюється на основі функціоналу дії (варіаційний принцип Гамільтона). В загальному случає необратимого деформування під впливом конзервативних і неконзервативних сил в умовах контактної взаємодії з оточуючими тілами даний функціонал слід представити в інкрементальному вигляді, виділив вклади блоків і вклади компонентів матеріала в блоках:

$$\begin{aligned} \Delta I|_{s+1} &= \sum_e \Delta I_e|_{s+1} = \sum_e \sum_n \Delta I_{en}|_{s+1} = \int_{t_s}^{t_{s+1}} [\Delta T - \Delta U + \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3] dt, \\ \Delta T &= \sum_e \sum_n \int_{V_{en}} \frac{1}{2} \rho \frac{\partial \Delta u^i}{\partial t} \frac{\partial \Delta u_i}{\partial t} dV_{en}, \quad \Delta U = \sum_e \sum_n \int_{V_{en}} \left( J \sigma^{ij} + \frac{1}{2} \Delta (J \sigma^{ij}) \right) \Delta \varepsilon_{ij} dV_{en}, \\ \Delta L_1 &= \sum_e \sum_n \int_{V_{en}} \rho [F^i + k_f \Delta F^i] \Delta u_i dV_{en}, \quad (\hat{\theta}^i, t) \in V \times [t_s, t_{s+1}], \quad V = \bigcup_{e,n} V_{en}, \quad (3.4) \\ \Delta L_2 &= \sum_e \sum_n \int_{A_{(\sigma)en}} [\sigma^i + k_\sigma \Delta \sigma^i] \Delta u_i dA_{(\sigma)en}, \\ (\hat{\theta}^i, t) &\in A_\sigma \times [t_s, t_{s+1}], \quad A_{(\sigma)} = \bigcup_{e,n} A_{(\sigma)en}, \\ \Delta L_3 &= \sum_e \sum_n \int_{A_{(c)en}} [(\sigma_\nu + \Delta \sigma_\nu) \Delta u_\nu + (\sigma_\tau + \Delta \sigma_\tau) \Delta u_\tau] dA_{(c)en}, \\ (\hat{\theta}^i, t) &\in A_{(c)} \times [t_s, t_{s+1}], \quad A_{(c)} = \bigcup_{e,n} A_{(c)en}, \quad s = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Матеріальні (внутрішні) переміщення среды при заданих граничних умовах і зовнішніх впливах визначаються тільки полем макроскопічних (каркасних) переміщень, задаючим переміщення її каркасних точок:

$$\hat{u}(\hat{\theta}^i, t) \Rightarrow \left[ \hat{u}(\hat{\theta}_{(1)}^i, t), \hat{u}(\hat{\theta}_{(2)}^i, t), \dots, \hat{u}(\hat{\theta}_{(k)}^i, t), \dots, \hat{u}(\hat{\theta}_{(k_{\max})}^i, t) \right]. \quad (3.5)$$

Етим обумовлюється визначення значень функціонала (3.2) як функції переміщень каркасних точок среды:

$$\begin{aligned} I|_s &= I|_s \left[ \hat{u}(\hat{\theta}_{(k)}^i)|_s \right] = I|_s \left[ \hat{u}(\hat{\theta}_{(1)}^i)|_s, \dots, \hat{u}(\hat{\theta}_{(k)}^i)|_s, \dots \right], \quad (3.6) \\ s &= 0, 1, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, k_{\max}, \end{aligned}$$

де  $k$  – індекс нумерації каркасних точок среды, заключаємый в кругліє скобки;  $k_{\max}$  – число точок среды, прийнятих в качестве каркасних, в том числіє розположених на граничній поверхності среды.

Функціонал (3.6) визначається на основі шагової процедури продовження рішення задачі по параметрам послідовності нагруження среды. Дана процедура учитыває історію нагруження среды, но не матеріала (не являється інкрементальною).

Инкрементальный функционал приращения энергии (3.3) определяем как функцию приращений перемещений каркасных точек на  $(s+1)$ -шаге деформирования:

$$\Delta I|_{s+1} = \Delta I|_{s+1} \left[ \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(k)}^i)|_s, \Delta \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(k)}^i)|_{s+1} \right] = \Delta I|_{s+1} \left[ \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(1)}^i)|_s, \Delta \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(1)}^i)|_{s+1}, \dots, \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(k)}^i)|_s, \Delta \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(k)}^i)|_{s+1}, \dots \right], \quad s = 0, 1, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, k_{\max}. \quad (3.7)$$

Инкрементальный функционал приращения действия (3.4) определяем как функционал текущих приращений перемещений (траекторий) каркасных точек на промежутке  $t_s \leq t \leq t_{s+1}$  для  $s+1$ - шага деформирования среды:

$$\Delta I|_{s+1} = \Delta I|_{s+1} \left[ \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(k)}^i, t_s), \Delta \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(k)}^i, t) \right]_{t_s}^{t_{s+1}} = \Delta I|_{s+1} \left[ \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(1)}^i, t_s), \Delta \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(1)}^i, t), \dots, \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(k)}^i, t_s), \Delta \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(k)}^i, t), \dots \right]_{t_s}^{t_{s+1}}, \quad (3.8)$$

$$t_s \leq t \leq t_{s+1}, \quad s = 0, 1, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, k_{\max}.$$

При этом оба функционала (3.7) и (3.8) определяются в зависимости от предыстории деформирования среды и её материала, которая предшествует моменту времени  $t_s$ .

Таким образом, в рассматриваемом подходе анализ композитной среды сводится к отысканию перемещений её каркасных точек, доставляющих стационарное значение функционалу энергии (3.6), функционалу инкрементального приращения энергии (3.7) или функционалу инкрементального приращения действия (3.8). При этом определяются внутренние поля среды (поля в компонентах материала среды), отвечающие перемещениям каркасных точек при заданных граничных и начальных условиях и внешних воздействующих полях. В отличие от метода конечных элементов (МКЭ) [10] или метода локальных вариаций (МЛВ) [11] в методе каркасных блоков (МКБ) вместо конечных элементов из однородного материала присутствуют каркасные блоки среды. При этом функционалы энергии или действия для блоков определяются из решений формируемых для окрестностей влияния краевых задач, а не на основе аппроксимации полей перемещений с помощью базисных функций, как это имеет место для МКЭ. Такая аппроксимация в рассматриваемом подходе не может быть применена в силу структурного строения блоков, когда поля их внутренних перемещений имеют локальный характер с разрывами градиентов на границах раздела структурных составляющих. Далее представим схемы метода каркасных блоков в формах дифференциальной и экстремальной задач на верхнем уровне анализа.

#### 4. Макромеханический уровень анализа

Рассмотрим схему макромеханического уровня анализа в случае статической постановки задачи деформирования среды на базе вычисления

функционала полной энергии (3.2) как функции перемещений каркасных точек

$$I = I[\hat{\mathbf{u}}_{(1)}, \hat{\mathbf{u}}_{(2)}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{(k)}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{(k_{\max})}] = \sum_e \sum_n I_{en} = \sum_e I_e, \quad (4.1)$$

$$I_e = \sum_n \int_{V_{en}} \Phi_n[q_{ij}] dV_{en} + \sum_n \int_{V_{en}} P_n[u_i] dV_{en} + \sum_n \int_{A_{(\sigma)en}} \Pi_n[u_i] dA_{(\sigma)en}, \quad s = 1, 2, \dots.$$

(индекс нумерации  $s$  – шага нагружения среды упускаем), где  $I_e$  – функционал энергии для блока « $e$ » среды. Представляемая далее схема макромеханического анализа применима и для случая описания деформирования среды на основе инкрементального функционала (3.3) с тем отличием, что операции метода МКБ производятся с инкрементальными приращениями перемещений каркасных точек  $\Delta \hat{\mathbf{u}}_{(k)}$  вместо самих перемещений  $\hat{\mathbf{u}}_{(k)}$ . Данная схема применима и в случае описания динамического деформирования среды на основе функционала инкрементального действия (3.4) с той поправкой, что операции метода производятся не на конечных приращениях перемещений, а на текущих приращениях перемещений (траекториях) каркасных точек среды на инкрементальных промежутках времени  $t_s \leq t \leq t_{s+1}$ ,  $s = 0, 1, \dots$ .

Функционал энергии среды (4.1) (функционал (3.2)) вычисляем на основе решения краевых задач для всех  $e$  – блоков среды в условиях их совместного деформирования при перемещениях каркасных точек

$$\hat{\mathbf{u}}_{(1)}, \hat{\mathbf{u}}_{(2)}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{(k)}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{(k_{\max})} \Rightarrow \left( \hat{\mathbf{u}}_{(\hat{\theta}_k^i)}; \quad k = 1, 2, \dots, k_{\max} \right), \quad (4.2)$$

которые определены на соответствующем этапе решения задачи деформирования среды в качестве оптимизирующего функционал приближения. Необходимое условие стационарности рассматриваемого функционала приводит к системе уравнений, которые определяют значения перемещений каркасных точек среды (4.2) как обращающие в нуль производные первого порядка от функции (4.1) по перемещениям этих же каркасных точек:

$$\frac{\partial I}{\partial \hat{\mathbf{u}}_{(1)}} \left( \hat{\mathbf{u}}_{(1)}, \hat{\mathbf{u}}_{(2)}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{(k)}, \dots \right) = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial \hat{\mathbf{u}}_{(2)}} \left( \hat{\mathbf{u}}_{(1)}, \hat{\mathbf{u}}_{(2)}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{(k)}, \dots \right) = 0, \quad (4.3)$$

$$\dots, \quad \frac{\partial I}{\partial \hat{\mathbf{u}}_{(k)}} \left( \hat{\mathbf{u}}_{(1)}, \hat{\mathbf{u}}_{(2)}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{(k)}, \dots \right) = 0, \dots.$$

Каждую из векторных производных (4.3) рассматриваем как совокупность трех производных по компонентам  $\hat{\mathbf{u}}_{(k)i}$  вектора перемещения

$\hat{\mathbf{u}}_{(k)} = \hat{\mathbf{u}}_{(k)i} \hat{\mathbf{r}}^i$ . К уравнениям (4.3) можно прийти и на основе принципа возможных (виртуальных) перемещений  $\delta I = (\partial I / \partial \hat{\mathbf{u}}_{(i)}) \delta \hat{\mathbf{u}}_{(i)} = 0$ .

Полагаем, что вариация (приращение)  $\Delta \hat{\mathbf{u}}_{(k)}$  перемещения  $\hat{\mathbf{u}}_{(k)}$  каркасной точки (k) изменяет состояние среды для тех её блоков, которые составляют некоторую окрестность данной каркасной точки. Такую окрестность называем окрестностью влияния каркасной точки. Новое значение энергии среды (4.1), обусловленное изменением перемещения каркасной точки, определится новым значением энергии  $I_{(k)}$  окрестности влияния каркасной точки (k) как суммой энергий  $I_{k_e}$  блоков, составляющих данную окрестность:

$$I_{(k)} = \sum_{k_e} I_{k_e}; I_{k_e} = I_e, e \rightarrow k_e, \quad (4.4)$$

где  $I_{k_e}$  находится по формуле (4.1) для энергии  $I_e$  блока с номером  $k_e$  в качестве  $e$ .

В силу понятия окрестности влияния каркасной точки имеет место представление энергии среды (3.2) и иных энергетических функционалов состояния среды, как (3.3), (3.4), в аддитивном виде

$$I = I_{(k)} + \bar{I}_{(k)}; I_{(k)} = I_{(k)}(\hat{\mathbf{u}}_{(k)}), \quad (4.5)$$

где  $I_{(k)}$  – энергия окрестности влияния каркасной точки (k),  $\bar{I}_{(k)}$  – энергия среды за исключением окрестности влияния каркасной точки (k). При изменении положения точки (k) изменяется энергия  $I_{(k)}$  (является функцией  $\hat{\mathbf{u}}_{(k)}$ ), энергия  $\bar{I}_{(k)}$  остается без изменения. Новые значения энергий блоков  $I_e$  из окрестности влияния каркасной точки (k) определяем на основе решения краевой задачи для окрестности из этих блоков при новом (варьированном) перемещении  $\hat{\mathbf{u}}_{(k)} + \Delta \hat{\mathbf{u}}_{(k)}$  данной каркасной точки.

Можно применять одно-, двух-, трехслойные и т.д. схемы окрестностей влияния каркасных точек. В случае однослойной схемы считаем, что перемещение каркасной точки влияет на состояние её окрестности, образованной одним слоем блоков вокруг каркасной точки. Такая окрестность, расположенная внутри среды, содержит  $2 \times 2 \times 2 = 8$  блоков и  $3 \times 3 \times 3 = 27$  каркасных точек. (Для макроскопически одномерной задачи однослойная окрестность влияния содержит 2 блока и 3 каркасных точек (поверхностей), для макроскопически двумерной задачи –  $2 \times 2 = 4$  блоков и  $3 \times 3 = 9$  каркасных точек (линий)). На рис. 3,а в плоскости плана схематично изображены 4 блока из 8 блоков, включаемых однослойной окрестностью точки (k). При двухслойной схеме окрестность влияния каркасной точки содержит  $4 \times 4 \times 4 = 64$  блоков и  $5 \times 5 \times 5 = 125$  каркасных точек. (Для макроскопически одномерной задачи двухслойная окрестность влияния содержит 4 блока и 5 каркасных точек (поверхностей), для макроскопически двумерной задачи –  $4 \times 4 = 16$  блоков и  $5 \times 5 = 25$  каркасных

точек (линий)). Из 64 блоков, включаемых двухслойной окрестностью точки (k), на рис. 3,б в плоскости плана показаны 16 блоков.

В общем случае p – слойной окрестности влияния каркасной точки число включаемых окрестностью блоков  $2p \times 2p \times 2p$  и каркасных точек  $(2p+1) \times (2p+1) \times (2p+1)$  (при плоской или осесимметричной постановке задачи на макромеханическом уровне –  $2p \times 2p$  блоков и  $(2p+1) \times (2p+1)$  каркасных точек).

Решение системы уравнений (4.3), определяющее перемещения каркасных точек, находим на основе дискретного метода Ньютона [12]. В результате применения данного метода приходим к итеративной последовательности систем уравнений метода каркасных блоков, реализуемого в форме дифференциальной задачи:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \hat{\mathbf{u}}_{(k)} \partial \hat{\mathbf{u}}_{(l)}} \Big|_{\hat{\mathbf{u}}_{(m)}^n} \left( \hat{\mathbf{u}}_{(l)}^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}_{(l)}^n \right) + \frac{\partial I}{\partial \hat{\mathbf{u}}_{(k)}} \Big|_{\hat{\mathbf{u}}_{(m)}^n} = 0, \quad k, l = 1, 2, \dots, \quad (4.6)$$

где  $\hat{\mathbf{u}}_{(l)}^n$ ,  $\hat{\mathbf{u}}_{(l)}^{n+1}$  – предыдущее (уточняемое) и последующее (уточненное) приближения перемещения (l) – каркасной точки;  $\partial I / \partial \hat{\mathbf{u}}_{(k)}$  и  $\partial^2 I / \partial \hat{\mathbf{u}}_{(k)} \partial \hat{\mathbf{u}}_{(l)}$  – первая производная по перемещению (k) – каркасной точки и производная второго порядка по перемещениям (k) – и (l) – каркасных точек от функционала энергии, которые вычисляются для совокупности уточняемых приближений перемещений каркасных точек среды  $\hat{\mathbf{u}}_{(m)}^n$ ,  $m = 1, 2, \dots$ .

Производные от энергии по перемещениям каркасных точек (4.3) определяем численным способом на основе применения конечных разностей второго порядка точности с учетом (4.5) как

$$\frac{\partial I}{\partial \hat{\mathbf{u}}_{(k)}} = \frac{I_{(k)}(\hat{\mathbf{u}}_{(k)} + \Delta \hat{\mathbf{u}}_{(k)}) - I_{(k)}(\hat{\mathbf{u}}_{(k)} - \Delta \hat{\mathbf{u}}_{(k)})}{2 \Delta \hat{\mathbf{u}}_{(k)}}, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (4.7)$$

Здесь  $I_{(k)}(\hat{\mathbf{u}}_{(k)} + \Delta \hat{\mathbf{u}}_{(k)})$ ,  $I_{(k)}(\hat{\mathbf{u}}_{(k)} - \Delta \hat{\mathbf{u}}_{(k)})$  – значения функционала энергии окрестности влияния (k) – каркасной точки, получаемые им при изменении (варьировании) перемещения  $\hat{\mathbf{u}}_{(k)}$  каркасной точки с номером k на величины  $\Delta \hat{\mathbf{u}}_{(k)}$  и  $-\Delta \hat{\mathbf{u}}_{(k)}$  соответственно, когда перемещения остальных каркасных точек среды не изменяются.

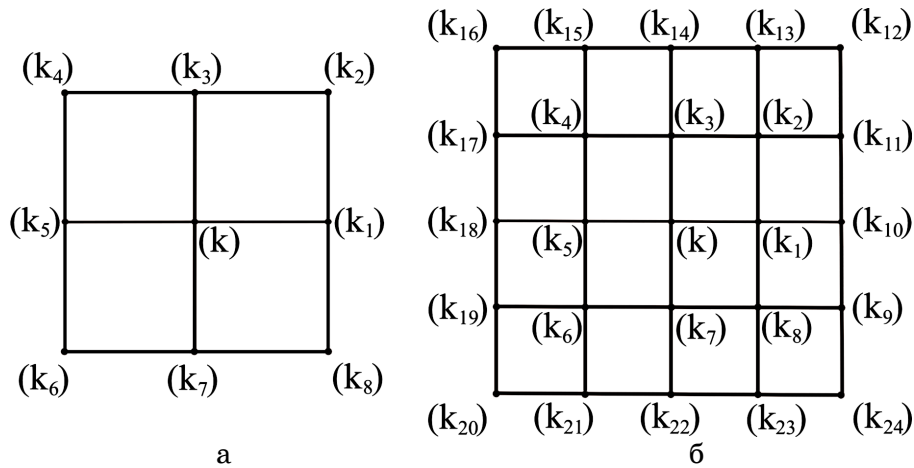


Рисунок 3 – Схемы однослойной (а) и двухслойной (б) окрестностей влияния каркасной точки (k) в плоскости плана.

Производные второго порядка от функционала энергии (4.1) по перемещениям (k)– и (l)– каркасных точек  $\partial^2 I / \partial \hat{u}_{(k)} \partial \hat{u}_{(l)} \neq 0$  в том случае, если окрестности влияния каркасных точек (k) и (l) пересекаются между собой. Примем во внимание представление энергии среды в виде

$$I = I_{(kl)} + \bar{I}_{(kl)}, \quad I_{(kl)} = I_{(kl)}(\hat{u}_{(k)}, \hat{u}_{(l)}), \quad (4.8)$$

где  $I_{(kl)}$  – энергия объединения пересекающихся между собой окрестностей влияния каркасных точек (k) и (l),  $\bar{I}_{(kl)}$  – энергия среды за исключением объединения пересекающихся окрестностей влияния каркасных точек (k) и (l). Изменение положений точек (k) и (l) обуславливает изменение энергии  $I_{(kl)}$ , энергия  $\bar{I}_{(kl)}$  при этом не изменяется.

Частные производные второго порядка от энергии вычисляем на основе применения конечных разностей с учетом (4.8) как ( $k \neq l$ ):

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \hat{u}_{(k)} \partial \hat{u}_{(l)}} = \frac{I_{(kl)}(\hat{u}_{(k)} + \Delta \hat{u}_{(k)}, \hat{u}_{(l)} + \Delta \hat{u}_{(l)}) - I_{(kl)}(\hat{u}_{(k)} - \Delta \hat{u}_{(k)}, \hat{u}_{(l)} + \Delta \hat{u}_{(l)}) - I_{(kl)}(\hat{u}_{(k)} + \Delta \hat{u}_{(k)}, \hat{u}_{(l)} - \Delta \hat{u}_{(l)}) + I_{(kl)}(\hat{u}_{(k)} - \Delta \hat{u}_{(k)}, \hat{u}_{(l)} - \Delta \hat{u}_{(l)})}{4 \Delta \hat{u}_{(k)} \Delta \hat{u}_{(l)}}, \quad (4.9)$$

$$k, l = 1, 2, \dots$$

(окрестности влияния точек (k) и (l) пересекаются между собой). Здесь  $I_{(kl)}(\hat{u}_{(k)} + \Delta \hat{u}_{(k)}, \hat{u}_{(l)} + \Delta \hat{u}_{(l)}), \dots, I_{(kl)}(\hat{u}_{(k)} - \Delta \hat{u}_{(k)}, \hat{u}_{(l)} - \Delta \hat{u}_{(l)})$  – значения функционала энергии объединения пересекающихся между собой окрестностей влияния (k)– и (l)– каркасных точек, которые последний получает при изменении перемещения  $\hat{u}_{(k)}$  точки (k) на величины  $\Delta \hat{u}_{(k)}$  и  $-\Delta \hat{u}_{(k)}$  при одновременном изменении перемещения  $\hat{u}_{(l)}$  точки (l) на



величины  $\Delta\hat{\mathbf{u}}_{(l)}$  и  $-\Delta\hat{\mathbf{u}}_{(l)}$ . При этом производная второго порядка (4.6) от функционала  $I$  по перемещениям точек  $(k)$  и  $(l)$  понимается как совокупность его девяти производных второго порядка по компонентам  $\hat{\mathbf{u}}_{(k)i}$ ,  $i=1,\dots,3$  и  $\hat{\mathbf{u}}_{(l)j}$ ,  $j=1,\dots,3$  данных векторов. Энергия объединения пересекающихся между собой окрестностей влияния двух каркасных точек определяется на основе решения соответствующей микрокраевой задачи для данного объединения окрестностей влияния.

Нетрудно показать, что частные производные второго порядка в (4.6) по перемещениям каркасных точек  $(k)$  и  $(l)$  с непересекающимися между собой окрестностями влияния равняются нулю. Применяя конечную разность по  $\hat{\mathbf{u}}_l$  от первой производной  $\partial I / \partial \hat{\mathbf{u}}_{(k)}$  как разницу значений этой производной при  $\hat{\mathbf{u}}_{(l)} + \Delta\hat{\mathbf{u}}_{(l)}$  и  $\hat{\mathbf{u}}_{(l)} - \Delta\hat{\mathbf{u}}_{(l)}$  и принимая во внимание (4.5), в силу независимости энергии  $k$ -окрестности от состояния  $l$ -окрестности, найдем:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \hat{\mathbf{u}}_{(k)} \partial \hat{\mathbf{u}}_{(l)}} = \frac{1}{2\Delta\hat{\mathbf{u}}_{(l)}} \left( \frac{I_{(k)}(\hat{\mathbf{u}}_{(k)} + \Delta\hat{\mathbf{u}}_{(k)}) - I_{(k)}(\hat{\mathbf{u}}_{(k)} - \Delta\hat{\mathbf{u}}_{(k)})}{2\Delta\hat{\mathbf{u}}_{(k)}} \Big|_{\hat{\mathbf{u}}_{(l)} + \Delta\hat{\mathbf{u}}_{(l)}} - \right. \quad (4.10)$$

$$\left. - \frac{I_{(k)}(\hat{\mathbf{u}}_{(k)} + \Delta\hat{\mathbf{u}}_{(k)}) - I_{(k)}(\hat{\mathbf{u}}_{(k)} - \Delta\hat{\mathbf{u}}_{(k)})}{2\Delta\hat{\mathbf{u}}_{(k)}} \Big|_{\hat{\mathbf{u}}_{(l)} - \Delta\hat{\mathbf{u}}_{(l)}} \right) = 0, \quad k, l = 1, 2, \dots$$

(окрестности влияния точек  $(k)$  и  $(l)$  не пересекаются между собой).

Вторые производные при  $k = l$  в (4.6) определяем исходя из значения энергии окрестности влияния точки  $(k)$  при исходном перемещении  $\hat{\mathbf{u}}_{(k)}$  и двух значений энергии, обусловленных изменениями каркасного перемещения на величины  $\Delta\hat{\mathbf{u}}_{(k)}$  и  $-\Delta\hat{\mathbf{u}}_{(k)}$ :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \hat{\mathbf{u}}_{(k)}^2} = \frac{I_{(k)}(\hat{\mathbf{u}}_{(k)} + \Delta\hat{\mathbf{u}}_{(k)}) - 2I_{(k)}(\hat{\mathbf{u}}_{(k)}) + I_{(k)}(\hat{\mathbf{u}}_{(k)} - \Delta\hat{\mathbf{u}}_{(k)})}{\Delta\hat{\mathbf{u}}_{(k)}\Delta\hat{\mathbf{u}}_{(k)}}, \quad (4.11)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Для каркасных точек, расположенных на части поверхности среды с кинематическими условиями, задаются их перемещения, определяемые данными условиями. Система уравнений дискретного метода Ньютона (4.6) содержит уравнения, отвечающие каркасным точкам  $(k)$ , которые располагаются внутри среды и на части граничной поверхности с заданными силовыми условиями. Матрица  $\partial^2 I / \partial \hat{\mathbf{u}}_{(k)} \partial \hat{\mathbf{u}}_{(l)} \Big|_{\hat{\mathbf{u}}_{(m)}^n}$ ,  $k, l = 1, 2, \dots$  системы данных уравнений, определяемая как (4.9) – (4.11), симметрична и имеет ленточный характер. Ширина ленты ненулевых элементов матрицы определяется числом слоев блоков в окрестностях влияния каркасных точек.

В случае однослойных окрестностей влияния производные  $\partial^2 I / \partial \hat{\mathbf{u}}_{(k)} \partial \hat{\mathbf{u}}_{(l)}$  отличны от нуля по перемещениям только тех  $(l)$  – каркасных точек, которые содержатся в окрестности влияния  $(k)$  – каркасной точки. Для внутренней каркасной точки  $(k)$ , не принадлежащей граничной поверхности среды, с однослойной окрестностью влияния из 8 блоков с 27-ю каркасными точками, отличными от нуля являются следующие производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial^2 \hat{\mathbf{u}}_{(k)}} \neq 0, \frac{\partial^2 I}{\partial \hat{\mathbf{u}}_{(k)} \partial \hat{\mathbf{u}}_{(k_1)}} \neq 0, \dots, \frac{\partial^2 I}{\partial \hat{\mathbf{u}}_{(k)} \partial \hat{\mathbf{u}}_{(k_{26})}} \neq 0, \quad (4.12)$$

где  $k, k_1, k_2, \dots, k_{26}$  – номера каркасных точек из однослойной окрестности влияния точки  $(k)$ . Каждое из соотношений (4.12), записанное в векторной форме, устанавливает отличные от нуля элементы матрицы, являющиеся вторыми производными от энергии  $I$  по компонентам перемещений  $\hat{\mathbf{u}}_{(k)1}, \hat{\mathbf{u}}_{(k)2}, \hat{\mathbf{u}}_{(k)3}; \dots; \hat{\mathbf{u}}_{(k_{26})1}, \hat{\mathbf{u}}_{(k_{26})2}, \hat{\mathbf{u}}_{(k_{26})3}$ . Таким образом, ширина ленты ненулевых элементов матрицы системы линейных уравнений (4.6) итерационной процедуры дискретного метода Ньютона для внутренних каркасных точек среды равняется  $27 \times 3 = 81$ . Для каркасных точек на граничной поверхности среды ширина ленты ненулевых элементов матрицы меньше. Если каркасная точка располагается на пересечении трех гладких частей наружной поверхности среды (является угловой), то её окрестность влияния состоит из одного блока с 8-ю каркасными точками и соответствующая ширина ленты матрицы  $8 \times 3 = 24$ . Для каркасной точки на пересечении двух гладких частей наружной поверхности окрестность влияния включает два блока с 12-ю каркасными точками, соответствующая ширина ленты матрицы  $12 \times 3 = 36$ . Если каркасная точка располагается на части наружной поверхности среды, которая может быть гладкой или кусочно-гладкой, то её однослойная окрестность влияния содержит 4 блока с 18 каркасными точками и ширина ленты матрицы равняется  $18 \times 3 = 54$ .

В случае двухслойных окрестностей влияния каркасных точек отличными от нуля производными от производной  $\partial I / \partial \hat{\mathbf{u}}_{(k)}$  являются производные не только по перемещениям каркасных точек, содержащиеся в окрестности влияния  $(k)$  – каркасной точки. Отличны от нуля также и производные по перемещениям каркасных точек из одного (третьего) слоя, окружающего данную двухслойную окрестность. Общее число каркасных точек в двухслойной окрестности и её окружающем (третьем) слое  $7 \times 7 \times 7 = 343$ . Поэтому в уравнениях (4.6) для рассматриваемой каркасной точки  $(k)$  не равны нулю следующие вторые производные от функционала энергии:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \hat{u}_{(k)} \partial \hat{u}_{(k)}} \neq 0, \frac{\partial^2 I}{\partial \hat{u}_{(k)} \partial \hat{u}_{(k_1)}} \neq 0, \dots, \frac{\partial^2 I}{\partial \hat{u}_{(k)} \partial \hat{u}_{(k_{342})}} \neq 0. \quad (4.13)$$

Здесь  $(k_1), \dots, (k_{342})$  – номера каркасных точек, которые помимо самой точки  $(k)$  расположены в окрестности влияния данной точки и слое, который к ней примыкает. Таким образом, число ненулевых элементов в строке матрицы системы уравнений (4.6) в случае двухслойной схемы метода равняется  $343 \times 3 = 1029$  – для внутренних каркасных точек на глубине трех и более слоев от граничной поверхности.

В общем случае  $p$ -слойной схемы для фиксированной каркасной точки  $(k)$  производные  $\partial^2 I / \partial \hat{u}_{(k)} \partial \hat{u}_{(l)}$  отличны от нуля только по перемещениям тех каркасных точек, которые содержатся как в окрестности влияния точки  $(k)$  из  $p$  слоев, так и в  $p-1$  окружающих слоях. Число каркасных точек  $(l)$  в  $p$ -слойной окрестности и примыкающих к ней слоях, по перемещениям которых производные  $\partial^2 I / \partial \hat{u}_{(k)} \partial \hat{u}_{(l)}$ ,  $k = \text{const}$  отличны от нуля, равняется  $(4p-1) \times (4p-1) \times (4p-1)$ . Соответственно, число ненулевых элементов в строке матрицы системы уравнений (4.4) равно  $(4p-1)^3 \times 3$ .

Окрестности влияния каркасных точек, примыкающие к граничной поверхности среды, и их слои «притяжения» состоят из меньшего числа блоков и частей блоков, отсекаемых граничной поверхностью среды. Такие окрестности содержат меньшее число каркасных точек, по перемещениям которых вторые производные от функционала энергии  $\partial^2 I / \partial \hat{u}_{(k)} \partial \hat{u}_{(l)}$  отличаются от нуля.

Для точек  $(k)$  с однослойными окрестностями, расположенных на части граничной поверхности среды с внешней нагрузкой, число ненулевых элементов в строке матрицы системы уравнений (4.6) будет меньшим, чем для каркасной точки в «глубине» среды. В случае двухслойных окрестностей влияния соответствующая ситуация имеет место уже для каркасных точек, расположенных в трех приграничных слоях каркасных точек. При  $p$ -слойных окрестностях влияния ширина ленты матрицы для точек из  $2p-1$  приграничных слоев каркасных точек среды меньше, чем ширина ленты матрицы для более «глубоко» расположенных каркасных точек (здесь в контексте изложения удобнее рассматривать слои (поверхности) расположения каркасных точек вместо слоев блоков).

Для точек  $(k)$ , которые располагаются на части граничной поверхности среды с кинематическими условиями, соответствующие уравнения системы уравнений (4.6) не формируются. Число слоев каркасных точек  $(k)$ , для которых число ненулевых элементов

$\partial^2 I / \partial \hat{u}_{(k)} \partial \hat{u}_{(l)}$  меньше, чем для «глубоко» расположенных точек, на единицу больше числа соответствующих слоев каркасных точек возле «силовой» части граничной поверхности.

В случае реализации метода каркасных блоков в форме экстремальной задачи производится прямая минимизация функционала полной энергии среды (4.1) на основе последовательного варьирования перемещений её каркасных точек. Для каждого вновь варьированного (измененного) значения перемещения каркасной точки решаются краевые задачи для её окрестности влияния. В результате решения данных краевых задач определяются новые внутренние поля окрестности влияния (k) – каркасной точки и измененное (новое) значение её энергии  $I_{(k)}$ . В соответствии с (4.5) энергия среды при рассматриваемом подходе обуславливается лишь изменением энергии окрестности влияния каркасной точки, то измененное (новое) значение энергии среды  $I = I_{(k)} + \bar{I}_{(k)}$ , где  $\bar{I}_{(k)}$  – значение энергии среды за исключением окрестности влияния точки (k), которое при варьировании её перемещения не изменяется.

Варьирование перемещений каркасных точек производится с учетом соответствующих ограничений (кинематических граничных условий). Если варьирование перемещения каркасной точки приводит к уменьшению энергии её окрестности влияния (4.4), то вариация каркасного перемещения считается актуальной. Если энергия окрестности влияния увеличивается, то вариация перемещения аннулируется, т.е. производится возврат к предшествующим значениям перемещения каркасной точки и энергии её окрестности соответственно. После завершения вариационной процедуры для данной каркасной точки производится выполнение процедуры для окрестности влияния смежной с ней другой каркасной точки и т.д., в соответствии с известной схемой МЛВ [11]. Отличие от известной схемы в том, что внутренние поля окрестности влияния каркасной точки при этом определяются на основе решения микрокраевых задач, а не на основе аппроксимации полей перемещений с помощью конечно-элементных базисных функций.

Метод каркасных блоков при его реализации в экстремальной форме можно применять для исследования деформирования композитных сред (как, впрочем, и однородных) в условиях наличия ограничений на переменные задачи в виде неравенств (контактные задачи, учет сил трения и т.п.).

Однослойная схема по сравнению с многослойными более просто реализуется, требует наименьшего объема вычислений и, вместе с тем, по точности анализа такая, как многослойные схемы. Последнее вполне очевидно из реализации подхода в форме экстремальной задачи. Погрешность анализа композитной среды на основе предложенного подхода, реализуемого как в дифференциальной, так и экстремальной

формах, не зависит от степени дискретизации на верхнем уровне анализа (масштаба разбиения среды на блоки, задающем густоту каркасных точек). Погрешность подхода определяется только точностью решения краевых (локально-структурных) задач для блоков среды на основе уравнений МДТТ, то есть зависит только от степени дискретизации нижнего уровня анализа (дискретизации блоков среды).

Метод каркасных блоков, разумеется, можно применять и к расчету (анализу) однородной среды. Энергия блоков, на которые разбивается однородная среда, может определяться разными методами вычислительной механики, как-то: методом конечных разностей (МКР), методом конечных элементов (МКЭ), методами нелинейного программирования и др. При этом точность расчета среды будет зависеть не от размеров блоков (числа каркасных точек), а от плотности дискретной сетки (степени дискретизации) блоков в расчете с помощью применяемого метода. (Формально однородная среда, как и структурная, может быть разбита на несколько блоков с единственной каркасной точкой внутри среды, являющейся их общей вершиной).

### 5. Микромеханический (локально-структурный) уровень анализа

На микромеханическом (локально-структурном) уровне анализа среды для окрестностей влияния ее каркасных точек формируются краевые (микробраевые) задачи. Соответственно статическому или динамическому характеру макромеханической (в целом для среды) краевой задачи на микромеханическом уровне решаются микробраевые задачи в статической или динамической постановках. Решения микробраевых задач выявляют внутренние поля в окрестностях влияния каркасных точек. В итоге их решений внутренние поля выявляются в целом для всей среды. На основе найденных внутренних полей окрестностей влияния определяются функционалы энергии, приращения энергии или действия для окрестностей влияния (для среды в целом данные функционалы задаются (3.2), (3.3) и (3.4) соответственно). Функционалы состояния среды вычисляются при реализациях подхода как в дифференциальной, так и экстремальной формах. В случае МКБ в форме дифференциальной задачи микробраевые задачи решаются также для объединений попарно пересекающихся между собой окрестностей влияния каркасных точек среды (см. п.4).

Уравнения движения компонентов материала окрестностей влияния каркасных точек среды представляем в виде

$$\dot{\nabla}_i \left[ (q_n / \dot{q})^{1/2} \sigma^{ij} (\delta_j^k + \dot{\nabla}_j u_n^k) \right] + \rho_n \left( F_n^k - \frac{\partial v_n^k}{\partial t} \right) = 0, \quad (5.1)$$

$$F_n^k = \mathbf{F}_n \cdot \mathbf{r}^k, \quad v^k = \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}^k, \quad \hat{\theta}^i \in V_{(k)n}, \quad t_0 \leq t \leq t_k, \quad n = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где  $V_{(k)n}$  – область окрестности влияния (k)–точки, занимаемая n–й структурной составляющей;  $\rho_n(\hat{\theta}^i)$ ,  $F_n^k(\hat{\theta}^i, t)$  – плотность материала и компоненты внешней массовой силы для n–й составляющей среды;  $u_n^k, v_n^k = \partial u_n^k / \partial t$  – компоненты перемещения и скорости n–й составляющей среды;  $\overset{\circ}{\nabla}_i$  – ковариантная производная в метрике  $\overset{\circ}{q}_{ij}$  исходной конфигурации среды по координатной переменной  $\hat{\theta}^i$ .

В более общих случаях исследования среды необходимо исходить непосредственно из вариационной формулировки краевой задачи для среды в целом на базе конечного функционала (3.2) или инкрементального функционала (3.3) в случае статической задачи и на базе инкрементального функционала (3.4) в случае динамической задачи. В этих случаях МКБ применяется в форме экстремальной задачи. Следует исходить из соответствующих вариационных формулировок краевых задач для окрестностей влияния каркасных точек. Для статической задачи, формулируемой на базе (3.2), вариационная формулировка краевой задачи для окрестности влияния каркасной точки (k) предполагает решение этой задачи производить на основе определения стационарного значения функционала энергии окрестности влияния этой точки для действительного поля перемещений  $\mathbf{u}(\hat{\theta}^i, t)$ :

$$I_{(k)}|_s = \sum_n I_{(k)n}|_s = \sum_n \int_{V_{(k)n}} \Phi_n[q_{ij}|_s] dV_{(k)n} + \sum_n \int_{V_{(k)n}} \overset{\circ}{\rho} P_n[u_i|_s] dV_{(k)n} + \quad (5.2)$$

$$+ \sum_n \int_{A_{(k)n}} \Pi_n[u_i|_s] dA_{(k)n} = \text{extremum}, \quad V_{(k)} = \bigcup_n V_{(k)n}, \quad s = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots$$

Здесь и далее  $I_{(k)}$  и  $I_{(k)n}$  – функционалы полной энергии окрестности влияния в объеме  $V_{(k)}$  каркасной точки (k) и n–й компоненты материала в объеме  $V_{(k)n}$  в пределах окрестности точки (k);  $A_{(k)n}$  – грань n–й компоненты окрестности (k)–точки в части граничной поверхности среды  $A_\sigma$ , через которую среда нагружается.

В качестве внешних условий микрокраевой задачи задаем перемещение каркасной точки (k) и его варьированные значения по найденному из решения системы уравнений (4.6) или прямой экстремализацией функционала (4.1) каркасному полю перемещений (3.5) как:

$$\mathbf{u}(\hat{\theta}_{(k)}^i, t_s) = \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(k)}^i, t_s), \quad \mathbf{u}(\hat{\theta}_{(k)}^i, t_s) + \Delta \mathbf{u}_{(k)} = \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(k)}^i, t_s) + \Delta \hat{\mathbf{u}}_{(k)}, \quad (5.3)$$

$$\mathbf{u}(\hat{\theta}_{(k)}^i, t_s) - \Delta \mathbf{u}_{(k)} = \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(k)}^i, t_s) - \Delta \hat{\mathbf{u}}_{(k)}, \quad s = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где  $t_s$  – значения параметра продолжения  $t$  в соответствии с последовательностью нагружения среды.

Условия на части граничной поверхности окрестности влияния, включаемой граничной поверхностью среды, определяются перемещениями и плотностями в ней внешних поверхностных сил:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\hat{\theta}^i, t_s) &= \bar{\mathbf{u}}(\hat{\theta}^i, t_s), \quad \hat{\theta}^i \in A_{(k)} \cap A_u, \\ \boldsymbol{\sigma}(\hat{\theta}^i, t_s) &= \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\hat{\theta}^i, t_s), \quad \hat{\theta}^i \in A_{(k)} \cap A_\sigma, \quad s=1,2,\dots, \quad k=1,2,\dots, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где  $A_{(k)}$  – граничная поверхность окрестности влияния  $(k)$  – каркасной точки;  $A_u, A_\sigma$  – части граничной поверхности среды  $A$  с заданными векторами перемещения  $\bar{\mathbf{u}}$  и напряжения  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  соответственно (для окрестностей влияния внутри среды такие условия отсутствуют).

Микрокраевая задача для окрестности влияния каркасной точки  $(k)$  решается при задаваемых для окрестности условиях (5.3), (5.4) и фиксированном положении той части внешней поверхности окрестности влияния, которая располагается внутри среды. Такое положение данной части внешней поверхности окрестности влияния определяется при выполнении той части итерационной процедуры анализа среды, которая предшествует варьированию положения данной каркасной точки. Соответствующее условие на части поверхности ограничения окрестности каркасной точки, которая расположена внутри среды, представим в виде

$$\mathbf{u}(\hat{\theta}^i, t_s) = \mathbf{u}^{(r)}(\hat{\theta}^i, t_s), \quad \hat{\theta}^i \in A_{(k)} \setminus A, \quad s=1,2,\dots, \quad k=1,2,\dots. \quad (5.5)$$

Здесь  $\mathbf{u}^{(r)}(\hat{\theta}^i, t_s)$  – поле перемещений среды, найденное на основе итерационной процедуры варьирования положениями каркасных точек среды до выполнения варьирования положением данной  $(k)$  – каркасной точки на  $s$  – шаге нагружения среды.

Внутренние граничные условия при бездефектном контакте составляющих представляют равенства между собой перемещений и напряжений в структурных составляющих на границах их раздела в рассматриваемой каркасной окрестности:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m(\hat{\theta}^i, t_s) &= \mathbf{u}_n(\hat{\theta}^i, t_s), \quad \boldsymbol{\sigma}_m(\hat{\theta}^i, t_s) = \boldsymbol{\sigma}_n(\hat{\theta}^i, t_s), \\ \hat{\theta}^i &\in A_{(k)mn}, \quad s=1,2,\dots, \quad k=1,2,\dots, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где  $A_{(k)mn}$  – поверхность раздела матрицы с номером « $m$ » и волокон или матричных включений системы армирования с номером « $n$ » в окрестности влияния каркасной точки  $(k)$ ;  $\mathbf{u}_m, \boldsymbol{\sigma}_m$  и  $\mathbf{u}_n, \boldsymbol{\sigma}_n$  – векторы перемещений и напряжений в компонентах « $m$ » и « $n$ » композитной среды.

Решения «микрокраевых» задач (5.2) – (5.6) при определяющих уравнениях компонентов материала позволяют найти внутренние поля среды  $u_{ni}(\hat{\theta}^i, t_s), \varepsilon_{nij}(\hat{\theta}^i, t_s), J_n \sigma_n^{ij}(\hat{\theta}^i, t_s)$ , отвечающие полю ее каркасных

перемещений  $\hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}^i, t_s)$  на  $s$ -шаге нагружения (перемещениям каркасных точек  $\hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(k)}^i, t_s)$ ,  $k=1, 2, \dots, k_{\max}$ ).

В случае исследования среды на базе инкрементального функционала (3.3) решения краевых задач для окрестностей влияния каркасных точек также базируются на уравнениях и условиях, которые записываются вместо (5.2) – (5.6) в соответствующем инкрементальном виде. В такой постановке задачи временная координата  $t$  выполняет роль параметра продолжения с инкрементальными по нему шагами, отвечающими дискретным значениям  $t = t_s$ ,  $s = 1, 2, \dots$ ;  $t = t_0$  – отвечает отсчетному состоянию среды.

В случае исследования динамического деформирования среды на базе функционала (3.4) решение задач деформирования окрестностей влияния каркасных точек производится на базе соответствующих экстремальных формулировок для данных окрестностей:

$$\Delta I_{(k)}|_{s+1} = \sum_n \Delta I_{(k)n}|_{s+1} = \int_{t_s}^{t_{s+1}} [\Delta T - \Delta U + \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3] dt = \text{extremum},$$

$$\left( \int_{t_s}^{t_{s+1}} \Delta T dt, \int_{t_s}^{t_{s+1}} \Delta U dt, \int_{t_s}^{t_{s+1}} \Delta L_1 dt, (\hat{\theta}^i, t) \in V_{(k)} \times [t_s, t_{s+1}] \right), \quad (5.7)$$

$$\left( \int_{t_s}^{t_{s+1}} \Delta L_2 dt, (\hat{\theta}^i, t) \in A_{(k)} \cap A_{\sigma} \times [t_s, t_{s+1}] \right),$$

$$\left( \int_{t_s}^{t_{s+1}} \Delta L_3 dt, (\hat{\theta}^i, t) \in A_{(k)} \cap A_c \times [t_s, t_{s+1}] \right), \quad s = 0, 1, \dots, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Здесь  $\Delta I_k$  и  $\Delta I_{(k)n}$  – инкрементальные функционалы действия для окрестности влияния каркасной точки ( $k$ ) и  $n$ -й компоненты материала в пределах окрестности влияния точки ( $k$ ), которые включаются функционалом для среды в целом (3.4).

В качестве внешнего граничного условия исходное или уточняемое (варьируемое) поле каркасных перемещений (3.5) задает приращения перемещений (траектории движения) каркасных точек в инкрементальном промежутке времени  $t_s \leq t \leq t_{s+1}$ :

$$\Delta \mathbf{u}(\hat{\theta}_k^i, t) = \Delta \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_k^i, t), \quad t_s \leq t \leq t_{s+1}, \quad s = 0, 1, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, k_{\max}. \quad (5.8)$$

На части граничной поверхности окрестности влияния, включаемой граничной поверхностью среды, в качестве внешних условий задаются текущие приращения перемещений и плотностей распределения внешних сил на инкрементальном шаге:



$$\Delta \mathbf{u}(\hat{\theta}^i, t) = \Delta \bar{\mathbf{u}}(\hat{\theta}^i, t), \hat{\theta}^i \in A_{(k)} \cap A_u, t_s \leq t \leq t_{s+1}, \quad (5.9)$$

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}(\hat{\theta}^i, t) = \Delta \boldsymbol{\sigma}(\hat{\theta}^i, t), \hat{\theta}^i \in A_{(k)} \cap A_\sigma, t_s \leq t \leq t_{s+1}, s = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots .$$

Оставшееся внешнее граничное условие задает неизменяемое для рассматриваемого шага нагружения текущее положение части граничной поверхности окрестности влияния каркасной точки, которая расположена внутри среды:

$$\Delta \mathbf{u}(\hat{\theta}^i, t) = 0, \hat{\theta}^i \in A_{(k)} \setminus A, t_s \leq t \leq t_{s+1}, s = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots \quad (5.10)$$

(текущее положение данной части внешней поверхности окрестности влияния определяются при выполнении той части процедуры, которая предшествует варьированию траекторией данной каркасной точки).

Внутренние граничные условия при бездефектном контакте компонентов материала представляют равенства между собой приращений перемещений и напряжений в компонентах на границах их раздела в рассматриваемой каркасной окрестности на текущем инкрементальном шаге:

$$\Delta \mathbf{u}_m(\hat{\theta}^i, t) = \Delta \mathbf{u}_n(\hat{\theta}^i, t), \Delta \boldsymbol{\sigma}_m(\hat{\theta}^i, t) = \Delta \boldsymbol{\sigma}_n(\hat{\theta}^i, t), \quad (5.11)$$

$$\hat{\theta}^i \in A_{(k)mn}, t_s \leq t \leq t_{s+1}, s = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots .$$

К внешним (5.8) – (5.10) и внутренним (5.11) условиям следует присоединить начальные условия, задающие приращения перемещений и скорости окрестности влияния в начальный момент инкрементального шага нагружения. При непрерывном с течением времени изменении перемещений и скоростей среды приращения перемещений в начальный момент очередного шага нагружения равны нулю:

$$\Delta \mathbf{u}(\hat{\theta}^i, t_s) = 0, \hat{\theta}^i \in V_{(k)}, t_s \in [t_s, t_{s+1}], s = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots .$$

Скорости в начальный момент очередного шага нагружения определяются как

$$\mathbf{v}(\hat{\theta}^i, t_s) = \left. \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right|_{t_s} = \left. \frac{d\Delta \mathbf{u}}{dt} \right|_{t_s}, \hat{\theta}^i \in V_{(k)}, t_s \in [t_s, t_{s+1}], s = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots .$$

Микромеханический анализ среды производится на основе выделения окрестностей влияния каркасных точек, образуемых одним слоем блоков, имеющих каркасную точку в качестве общей для них вершины. Можно также применять с двумя, тремя и большим числом слоев окрестности влияния каркасных точек (см. п. 4). В случае применения окрестностей влияния с двумя и более слоями блоков, другие каркасные точки в окрестности «базовой» точки (k) выполняют такую же роль, как точки дискретной схемы микромеханического уровня анализа (разумеется, к самой точке (k) это не относится).

При изменении (варьировании) на макромеханическом уровне анализа перемещений либо траекторий каркасных точек производится переычисление внутренних полей их окрестностей влияния на базе решения микрокраевых задач (5.1) или (5.2), (5.3) – (5.6) (статическое

нагружение) либо (5.7) – (5.11) (динамическое нагружение). Решение данных микрокраевых задач для окрестностей каркасных точек среды может осуществляться на базе метода конечных элементов, метода конечных разностей, метода локальных вариаций и других известных методов МДТТ.

Если метод МКБ применяется в дифференциальной форме, то наряду с микрокраевыми задачами для окрестностей влияния каркасных точек решаются также и микрокраевые задачи для объединений попарно пересекающихся между собой их окрестностей влияния. Микрокраевые задачи для объединений пересекающихся окрестностей влияния каркасных точек формулируются так, как и для отдельных окрестностей влияния. Отличием является лишь то, что вместо перемещения (5.3) одной каркасной точки (k) задаются перемещения двух каркасных точек (k) и (l) с пересекающимися окрестностями влияния на основе найденного поля каркасных перемещений  $\hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}^i, t)$ , как-то:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\hat{\theta}_{(k)}^i, t_s) &= \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(k)}^i, t_s), \quad \mathbf{u}(\hat{\theta}_{(l)}^i, t_s) = \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(l)}^i, t_s), \\ \mathbf{u}(\hat{\theta}_{(k)}^i, t_s) \pm \Delta \mathbf{u}_{(k)} &= \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(k)}^i, t_s) \pm \Delta \hat{\mathbf{u}}_{(k)}, \\ \mathbf{u}(\hat{\theta}_{(l)}^i, t_s) \pm \Delta \mathbf{u}_{(l)} &= \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(l)}^i, t_s) \pm \Delta \hat{\mathbf{u}}_{(l)}, \\ s &= 1, 2, \dots, \quad k, l = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Благодаря заданию перемещений каркасных точек и последовательному решению задач локально-структурного уровня анализа для отдельных окрестностей влияния среды, а не в целом для среды, вычисление внутренних полей среды приобретает устойчивый характер. Для задач с экстремальной формулировкой процедура вычисления внутренних полей в условиях, когда перемещения (модули векторов) значительно превосходят расстояния между смежными точками дискретной схемы микромеханического анализа, требует намного меньшего объема вычислений. Это имеет место из-за возможности применения больших шагов по истории нагружения среды на базе использования поля перемещений каркасных точек среды. Взаимные перемещения смежных каркасных точек могут при этом на порядок и более превосходить расстояния между смежными точками локальной дискретизации блоков (окрестностей влияния). Тогда перемещения каркасных точек определяют соответственно большие перемещения микроточек каркасных блоков в качестве исходного приближения для последующего выполнения вариационной процедуры локально-структурного уровня анализа при реализации последнего на ее основе.

## 6. Заключение

Предложенный метод каркасных блоков (МКБ) представляет собой двухуровневый макро–микромеханический подход в механике композитных сред при малых и больших деформациях компонентов

материала среды. Метод может применяться при слабых и высоких градиентах макроскопического состояния среды, а также для сред, строение которых не позволяет производить такую классификацию их состояния. Данный подход по сравнению с чисто микромеханическим (моделью кусочно-однородной среды), когда каждый из элементов структуры рассчитывается в условиях его совместного деформирования со всей остальной средой в целом (а не в пределах блока), имеет важные преимущества.

Блочный характер подхода позволяет организовать эффективный алгоритм на базе параллельного решения локальных краевых задач для окрестностей каркасных точек из блоков среды в случае МКБ в форме экстремальной задачи и для окрестностей и объединений попарно пересекающихся окрестностей каркасных точек в случае МКБ в форме дифференциальной задачи.

Двухуровневый подход реализуется устойчиво и с меньшим объемом вычислений на основе каркасного поля перемещений, задающего материальные перемещения каркасных точек среды. Это обуславливается возможностью применения на макромеханическом уровне достаточно больших шагов по нагружению среды, обуславливающих каркасные перемещения и вместе с ними перемещения локально-структурного уровня, которые могут на порядки превосходить размеры структуры материала среды. Каркасные точки при этом выполняют роль базовых (опорных) точек численной реализации анализа среды.

В подходе можно применять укрупненные блоки армированной (кусочно-однородной) среды, включающие то или иное число блоков представления структуры материала. Тогда плотность расположения каркасных точек среды уменьшается, а расстояния между смежными каркасными точками увеличиваются. Это целесообразно при анализе сред со структурой мелкого масштаба (например, нанотехнологической), когда перемещения деформируемой среды на несколько порядков превосходят характерные размеры ее структуры. Погрешность анализа среды при этом зависит не от плотности расположения каркасных точек, а от точности микромеханического уровня анализа, которая определяется плотностью расположения узловых точек дискретной схемы данного уровня.

Метод каркасных блоков позволяет производить исследование потери внутренней (и приповерхностной) устойчивости с поведением материала среды при закритических деформациях. Это производится на основе варьирования разбиением среды на блоки тех или иных размеров (варьирования расположением каркасных точек как узловых вершин выделяемых блоков среды). На основе варьирования размерами блоков и соответствующей организации локально-структурного уровня их анализа по кусочно-однородной модели выявляется потеря внутренней устойчивости и эволюция закритического деформирования материала среды (переходы к устойчивым формам равновесия материала).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахундов В.М. Структурная макроскопическая теория жестких и мягких композитов. Инвариантное описание //Механика композит. материалов. – 1998. – Т. 34, №5. – С. 595–612.
2. Ахундов В.М. Каркасная теория жестких и мягких композитов с неискривленными и искривленными структурами. Инвариантное описание //Механика композиционных материалов и конструкций. – 2000. – Т. 6, №2. – С. 275–293.
3. Ахундов В.М. Анализ эластомерных композитов на основе систем волокон. 2. Однонаправлено армированные композиты // Механика композит. материалов. – 1999. – Т. 35, №1. – С. 29–50.
4. Ахундов В.М. Анализ эластомерных композитов на основе систем волокон. 3. Двухнаправлено армированные композиты //Механика композит. материалов. – 1999. – Т. 35, №4. – С. 479–492.
5. Ахундов В.М. Анализ эластомерных композитов на основе систем волокон. 4. Трехнаправленно армированные композиты //Механика композит. материалов. – 2001. – Т. 37, №3. – С. 355–376.
6. Ахундов В.М., Лунев В.П. Расчет и экспериментальное исследование растяжения и сжатия однонаправленного резинокордного композита // Механика композит. материалов. – 1999. – Т. 35, №3. – С. 325–334.
7. Ахундов В.М., Лунев В.П. Расчет и экспериментальное исследование растяжения перекрестно армированного резинокордного композита //Механика композит. материалов. – 2001. – Т. 37, №2. – С. 215–225.
8. Akhundov V.M. Modeling the large deformations of fibrous bodies of revolution by using a two-level carcass theory and an applied one-level theory // Sixteenth International Conference Mechanics of Composite Materials. – Riga, 2010. – P. 29.
9. Ахундов В.М. Статическая и динамическая экстремальные задачи упруговязкопластической среды при больших упругих, ползучести и пластических деформациях // Теория и практика металлургии. –2010. – № 1 – 2. – С. 145–152. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под общ. ред. А.С. Сахарова и И. Альтенбаха. – Киев: Вища школа, 1982.– 480 с.
10. Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления. – М.: Наука, 1973. –238 с.
11. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975. – 558 с.